DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1) Liczby całkowite 2, 5, 6, 9, 14 pomieszano i ustawiono w innym porządku. Okazało się, że wówczas sumy pierwszych trzech i ostatnich trzech wyrazów są takie same. Jaka liczba stała w środku?

2) Pięć jednakowych jabłek i trzy jednakowe gruszki ważą tyle, ile cztery takie jabłka i cztery takie gruszki. Co jest cięższe jabłko czy gruszka?

3) Jakie znaki działań wpisać pomiędzy liczby 2016, 2018, 2017, aby otrzymać w wyniku $2017-\frac{1}{2017}$?

4) Zapis a^n (czytamy a do potęgi ^{n}) oznacza *n*-krotne mnożenie liczby *a* przez siebie. Która z liczb: 4^{64}, 8^{30}, 16^{20} jest największa, a która najmniejsza?

5) Uczniów biorących udział w konkursie KOMA należało rozmieścić w salach po równo, tak by w każdej sali były nie więcej niż 32 osoby. Kiedy w salach usadzono po 22 osoby, dla jednego zawodnika zabrakło miejsca. Kiedy z jednej sali zrezygnowano, miejsc wystarczyło dla wszystkich. Ilu zawodników wzięło udział w konkursie i w ilu salach go pisali?

6) Jaki kąt tworzą wskazówki zegara o godzinie 15:21?

7) Czy wierzchołki ośmiokąta foremnego można ponumerować liczbami od 1 do 8 tak, aby dla dowolnych trzech kolejnych wierzchołków suma numerów była większa od 13?

8) Czy numer bieżącego roku jest liczbą pierwszą?

9) Ile jest liczb dwudziestocyfrowych?

10) Prostokątny plac o wymiarach x m na x+1 m wyłożony został prostokątnymi płytami o wymiarach *k* m na *k*+1 m, gdzie *k* jest liczbą naturalną i zmienia się od 1 do 8. Jaki jest obwód tego placu?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W nowym ustawieniu równe są sumy pierwszych dwóch i ostatnich dwóch wyrazów. Ze wszystkich możliwych par jedyne jednakowe sumy dają 2 i 9 oraz 5 i 6. Zatem w środku stało 14. Za odpowiedz bez uzasadnienia, ze jest jedyna przyznajemy 3 pkt

2. Połóżmy owoce na wadze szalkowej. Waga będzie w równowadze, jeśli na jednej szalce będzie 5 jabłek i 3 gruszki, a na drugiej 4 jabłka i 4 gruszki. Jeśli zdejmiemy z każdej szalki po 4 jabłka i 3 gruszki, waga nadal będzie w równowadze, a pozostanie na niej po jednej stronie jabłko, a po drugiej gruszka. Czyli ważą tyle samo.

3. Sprowadzamy do wspólnego mianownika $2017-\frac{1}{2017}=\frac{2017\cdot 2017-1}{2017}$. Licznik można zapisać jako $(2018–1)(2016+1)–1 = 2018\cdot2016 + 2018– 2016–1 – 1 = 2018\cdot2016$. Zatem między podane liczby trzeba wpisać najpierw znak mnożenia, a potem dzielenia $2018\cdot2016:2017$. Za samą odpowiedz przyznajemy 5 pkt. Na prośbę jury uczeń powinien przedstawić, w jaki sposób doszedł do wyniku. Za wynik otrzymany metodą wielokrotnych prób przyznajemy 7 pkt.

4. Każdą z liczb przedstawiamy w postaci potęgi liczby 2: $4^{64} = (2\cdot2)^{64} = 2^{128}$, $8^{30} = (2\cdot2\cdot2)^{30} = 2^{90}$, $16^{20} = (2\cdot2\cdot2\cdot2)^{20} = 2^{80}$. Zatem największa jest liczba 4^{64}, a najmniejsza 16^{20}.

5. Niech s oznacza liczbę początkowo użytych sal. Rezygnacja z jednej sali oznacza, że 23 osoby (22 z tej sali i jedna osoba, dla której zabrakło miejsca) muszą zostać rozlokowane po równo pomiędzy pozostałe s-1 sal. Stąd $(s-1) \mid 23$. Zatem $s-1 = 23$ lub $s-1 = 1$. Drugi przypadek odrzucamy, bo wtedy liczba uczestników po przeniesieniu ich do jednej sali byłaby zbyt duża (45>32). Stąd $s-1=23$ i jest to liczba sal, do których przeniesiono po 1 uczestniku. Zatem w konkursie brało udział $23\cdot(22+1) = 529$ osób.

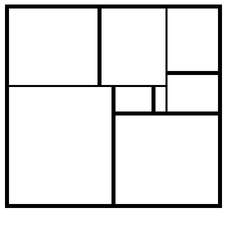
6. O 15:20 wskazówki tworzą kąt 20°.Wskazówka minutowa obraca się o 6° na minutę, a godzinowa, która jest 12 razy wolniejsza, kąt 0,5°. Zatem o godzinie 15:21 wskazówki utworzą kąt o mierze 20°+6°–0,5° = 25,5°. Można podać w odpowiedzi dopełnienie tego kąta, czyli 334,5°.

7. Mamy 8 kolejnych trójek numerów wierzchołków. Tworząc te trójki, każdej z liczb używamy trzykrotnie, zatem suma wszystkich trójek wynosi $3 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 8) = 3 \cdot 36 = 108$. Suma każdej trójki ma wynosić co najmniej 14, więc suma wszystkich trójek powinna wynosić co najmniej $8 \cdot 14 = 112> 108$, co daje sprzeczność. Za odpowiedź bez precyzyjnego uzasadnienia lub otrzymaną przez wielokrotne próby przyznajemy 2 punkty.

8. Szukamy czynnika właściwego liczby 2017 wśród liczb pierwszych nieprzekraczających 45 (bo $45^2=2025$). Inne sprawdzenia nie są potrzebne. Za brak uzasadnienia tego faktu odejmujemy 3 pkt. Za wykonywanie niepotrzebnych sprawdzeń przez liczby złożone lub większe od 45 odejmujemy 2 pkt. Podzielność przez 2, 3, 5 i 11 wynika z cech podzielności. Podzielność przez 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 i 43 trzeba sprawdzić bezpośrednio, ale z użyciem szacowania lub technik sprytnych rachunków, np. przy badaniu podzielności przez 17 mamy 1700 +170+170 = 2040, 2040 – 34 = 2006, czyli 2017 nie dzieli się przez 17. Na życzenie jury uczeń powinien zaprezentować, jak badał podzielność. Jeśli obliczał za każdym razem dokładny wynik dzielenia, w tym na kalkulatorze, odejmujemy 2 pkt.

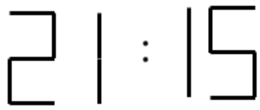
9. Liczb dwudziestocyfrowych jest $9\cdot10\cdot10\cdot\ldots\cdot10\cdot10$, gdzie w iloczynie występuje 19 dziesiątek. Najmniejsza to 10…00 (19 zer), a największa 99…99 (20 dziewiątek). Zatem jest ich 99…99 (20 cyfr) – 99…99 (19 cyfr) = 900…00 (19 zer). Można też skorzystać z reguły mnożenia (na pierwszym miejscu cyfra od 1 do 9, na pozostałych dowolna cyfra). Za odpowiedź 10^{20} przyznajemy 2 pkt, a za odpowiedź bez uzasadnienia 4 pkt.

10. Suma pół wszystkich płyt wynosi $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+7\cdot8+8\cdot9 = 2+6+12+20+30+42+56+72 = 240=15\cdot16$. Zatem plac ma boki długości 15 m i 16 m, a obwód $2\cdot(15+16) = 2\cdot31=62$ m. Trzeba jeszcze sprawdzić, czy wyłożenie placu takimi płytami jest możliwe (patrz rysunek). Za brak tego sprawdzenia odejmujemy 3 pkt. Z kolei za narysowanie na początku konkretnego układu płytek i obliczenie obwodu na podstawie tego rysunku przyznajemy 3 pkt, bo w zadaniu nie ma podanego żadnego konkretnego układu i nie wiadomo, czy jest on jedyny możliwy.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ II

1. .Na dworcu naprzeciw wyświetlacza zegara cyfrowego znajduje się ściana z lustra. O 21:15 podróżny zauważył, że obraz na wyświetlaczu i jego odbicie w lustrze wyglądają tak samo. Ile razy zdarza się to w ciągu doby?



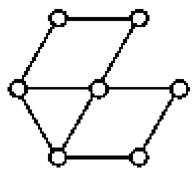
2. Uczniowie VI a otrzymali z poprawy pracy klasowej oceny 2, 3, 4 i 5. Dwój, trój i piątek było tyle samo, a czwórek było więcej niż wszystkich pozostałych ocen. Więcej niż trójkę otrzymało mniej niż 10 uczniów. Ilu uczniów otrzymało trójkę, jeśli poprawę pisało nie mniej niż 12 osób?

3. Zapis $n!$ [czytaj: en silnia] oznacza iloczyn liczb naturalnych od 1 do n. Iloma zerami kończy się zapis dziesiętny liczby 127!?

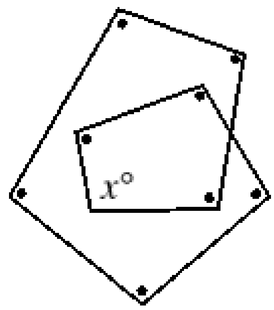
4. Po świętach babcia Rozalia wyniosła na strych ozdoby choinkowe. Bombki przechowuje w czterech małych pudełkach i jednym dużym. W dużym pudełku jest o 10% mniej bombek niż w małych pudełkach razem. Ile bombek ma babcia Rozalia, jeśli w sumie jest ich nie więcej niż 80, a w małych pudełkach jest ich w sumie więcej niż 30?

5. Znajdź najmniejsze cztery kolejne liczby nieparzyste dodatnie, których suma dzieli się przez 15.

6. Kółeczka na diagramie należy pokolorować tak, aby każde kółka połączone odcinkiem miały inne kolory. Ile najmniej kolorów kredek potrzeba użyć, aby uzyskać taki efekt?



7. Komisarz Rex podsłuchał taką rozmowę między podejrzanymi:
Abelard: Bernard jest niewinny.
Bernard: To Celestyn jest winny.
Celestyn: Nieprawda. To Dowgird jest winowajcą.
Dowgird: Abelard na pewno jest niewinny.
Wiadomo, że tylko winny kłamie. Kogo powinien aresztować komisarz Rex?



8. Wszystkie kąty zaznaczone na diagramie kropką są przystające do kąta o mierze $x°$. Ile wynosi x?

9. Tomek stoi na peronie o długości 340 m. Przejeżdżający obok niego pociąg towarowy mijał go 6s, a od momentu kiedy lokomotywa dotarła na początek peronu do momentu, gdy tylne światła ostatniego wagonu minęły jego koniec, upłynęły 23 s. Pociąg przez cały czas jechał ze stałą prędkością. Jaka to była prędkość i jak długi był pociąg?

10. Dwa okręgi o różnych promieniach są zewnętrznie styczne i oba są styczne wewnętrznie do trzeciego okręgu o średnicy 20 cm. Oblicz obwód trójkąta utworzonego przez środki tych okręgów.

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. W odbiciu lustrzanym cyfry godzin stają się cyframi minut w odwrotnej kolejności, zatem w ciągu każdej godziny taka sytuacja może wystąpić co najwyżej raz. Cyframi, które przy odbiciu przechodzą na siebie, są 0, 1 i 8. Cyfry, których odbiciem jest inna cyfra, to 2 i 5. Cyfra 8 może stać tylko na drugim i czwartym miejscu, więc nie bierzemy jej pod uwagę. Rozpatrujemy wskazania, w których występuje 0, 1, 2 i 5, przy czym zakładamy, że zegar wyświetla zawsze 4 pozycje (tzn. 1:10 wskazuje jako 01:10). Zegar i jego odbicie wyglądają tak samo o godzinach: 00:00, 01:10, 02:50, 05:20, 10:01, 11:11, 12:51, 15:21, 20:05, 21:15, 22:55. Takich wskazań jest jedenaście (jeśli zegar nie wyświetla zer wiodących, to odrzucamy godziny 00:00, 01:10, 02:50, 05:20).

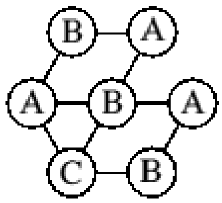
2. Niech x – liczba trójek, y – liczba czwórek. Mamy $y > 3x$, $x + y < 10$ oraz $3x + y \geq 12$. Musi zachodzić $x>1$, bo w przeciwnym razie $y>9$ i $y\leq 9$ wykluczają się. Z pierwszego i trzeciego równania wynika, że $y > 3x \geq 12–y$, zatem $y>6$. Warunki $x>1$, $y>6$ oraz $x + y <10$ spełniają liczby $x = 2$ i $y = 7$. Zatem dwóch uczniów otrzymało trójkę.

3. Zer na końcu liczby jest tyle, co dziesiątek w rozkładzie liczby na czynniki, a tych jest tyle, co piątek w rozkładzie na czynniki pierwsze (bo dwójek w tym rozkładzie jest więcej). Co piąta liczba dzieli się przez 5, co 25. Liczba ma w rozkładzie dwie piątki (25, 50, 75, 100 i 125), a liczba 125 ma trzy piątki w rozkładzie. Zatem zer na końcu liczby 127! jest [127:5] +5 + 1, gdzie kwadratowy nawias oznacza część całkowitą. To daje 25+6 = 31. Z zliczanie piątek ‘na piechotę’ odejmujemy 3 pkt.

4. Niech x oznacza liczbę bombek w małych pudełkach. Wówczas $0{,}9x$ to liczba bombek w dużym pudle. Otrzymujemy $x + 0{,}9x \leq 80$ i $x>30$. Stąd $30<x\leq 80/1{,}9\approx 42{,}105$. Liczba bombek jest naturalna, więc może wynosić od 31 do 42, ale tylko 10% z 40 jest liczbą naturalną, zatem w małych pudelkach było 40 bombek, a w pudle 36. Wszystkich bombek było 76.

5. Cztery kolejne liczby nieparzyste dają sumę $2n+1+2n+3+2n+5+2n+7 = 8n+16 = 8(n+2)$, a to dzieli się przez 15 wtedy, gdy $n+2$ się dzieli (bo 8 i 15 są względnie pierwsze). Najmniejszą liczbą n spełniającą ten warunek jest 13, zatem szukane liczby to: 27, 29, 31, 33. Za samą odpowiedź przyznajemy 3pkt. Za bardziej skomplikowane rozumowanie (z rozważaniem różnych przypadków) przyznajemy 8 pkt.

6. Na diagramie w lewym dolnym rogu mamy trzy kółka połączone każde z każdym. Do każdego trzeba zatem użyć innego koloru. I to już wystarczy, jak pokazano na rysunku. Za odpowiedź na przykładzie bez wskazania konieczności użycia trzeciego koloru przyznajemy 2 pkt (bo z przykładu nie wynika, ze przy jakimś innym kolorowaniu nie wystarczą tylko 2 kolory).

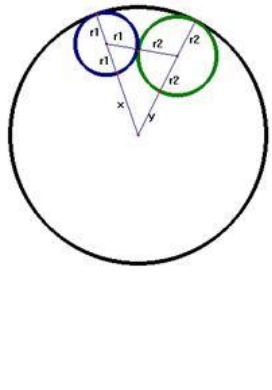


7. Kłamać musi Celestyn lub Bernard, bo ich wypowiedzi nie mogą być obie prawdziwe. Gdyby Bernard kłamał (czyli był winny), to Celestym mówiłby prawdę i winny byłby Dowgird, czyli byłoby dwóch sprawców, a ma być tylko jeden (kłamca). Zatem to Celestyn kłamie i jest winowajcą. Za rozumowanie do tego miejsca przyznajemy 6 pkt. Teraz trzeba jeszcze pokazać, że przy założeniu winy Celestyna, pozostałe informacje są zgodne z treścia zadania i nie prowadzą do sprzeczności.

8. Niech jedyny nieoznakowany kąt wewnętrznego pięciokąta ma miarę $y°$. Suma kątów każdego pięciokąta wynosi 540°, bo można go podzielić przekątnymi wychodzącymi z jednego wierzchołka na 3 trójkąty o sumie kątów $3\cdot 180°$. Zatem $4x+y=540$. Natomiast w zewnętrznym sześciokącie kąt wklęsły ma miarę $360°–y$ (kąty wierzchołkowe), a suma kątów sześciokąta wynosi 720°. Zatem $5x + 360–y=720$, czyli $5x –y=360$. Sumując dwie otrzymane równości, mamy $9x=900$, stąd $x=100$.

9. Niech p to długość pociągu w metrach, v – jego prędkość w m/s. Otrzymujemy zależności $6v = p$ oraz $23v = 340 + p$. Rozwiązaniem jest $p = 120$ m, $v = 20$ m/s.

10. Niech r_1, r_2 – promienie okręgów stycznych zewnętrznie, R – promień trzeciego okręgu. Wówczas $R = 2r_1+x = 10$ i $R = 2r_2+y = 10$ a obwód trójkąta: $O = 2r_1+x + 2r_2+y =$ $10 + 10 = 20$.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1. W Europie zużycie paliwa podaje się w litrach na 100 przejechanych kilometrów, a w Stanach Zjednoczonych w milach, które można przejechać na jednym galonie paliwa. Jakie spalanie ma w USA samochód, który w Europie pali 10 litrów na 100 kilometrów? Przyjmujemy, że mila to 1,609 km, a galon to 3,785 litra.

2. Jaką resztę daje przy dzieleniu przez 5 liczba 987654321 podniesiona do potęgi 2017?

3. Która liczba jest większa: $\frac{123456789}{123456790}$ czy $\frac{987654320}{987654321}$?

4. Jaka najmniejsza liczba zapisana za pomocą samych siódemek dzieli się przez 2018?

5. Ile czasu w ciągu doby obie wskazówki spędzają jednocześnie między liczbami 2 i 3 na tarczy zegara?

6. Ile miesięcy o liczbie dni różnej niż 30 było w XX wieku?

7. Jacek i Agatka wyruszają nad jezioro. Mają do pokonania 22 km. Jacek wyjeżdża na rowerze z prędkością 10 km/h, ale po przejechaniu kilku kilometrów zostawia rower i idzie dalej pieszo z prędkością 6 km/h. Agatka wyrusza pieszo z prędkością 5 km/h, dochodzi do roweru i jedzie na nim z prędkością 12 km/h. Ile minut rower nie był używany, jeżeli Jacek i Agatka wyruszyli na jezioro jednocześnie, pokonali tę samą drogę i przybyli na miejsce jednocześnie?

8. Z miliona kostek do gry zbudowano sześcian. Ile najwyżej szóstek może być widocznych na jego ścianach?

9. Jaki jest największy wspólny dzielnik liczb 24! oraz 24^{24}?

10. Ile naturalnych dzielników ma liczba 2017^{2017}?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Samochód przejedzie na jednym litrze benzyny 10 km, a na jednym galonie $3{,}785 \cdot 10 = 37{,}85$ km. Zatem na jednym galonie samochód przejedzie $37{,}85/1{,}609 \approx 23{,}52$ mili. Za błędy rachunkowe, przy prawidłowym sposobie obliczeń odejmujemy 3 pkt.

2. Z algorytmu mnożenia pisemnego wynika, że ostatnią cyfrą dowolnej potęgi liczby zakończonej zerem jest jedynka. Liczba o 1 mniejsza kończy się zerem, wiec dzieli się przez 5, zatem szukana reszta wynosi 1.

3. Oba ułamki są mniejsze od 1. Pierwszy o $\frac{1}{123456790}$, a drugi o , drugi jest o $\frac{1}{987654321}$, zatem drugiemu ułamkowi brakuje mniej do 1, więc jest większy.

4. Żadna. Liczba podzielna przez 2018 musi być parzysta, a liczby podanej postaci są nieparzyste.

5. Wskazówka godzinowa jest między 2 a 3 przez 2 godziny (między $2^{\underline{00}}$ a $3^{\underline{00}}$ i między $14^{\underline{00}}$ a $15^{\underline{00}}$). W tym czasie minutowa znajduje się w tej samej części tarczy przez 10 minut – między $2^{\underline{05}}$ a $2^{\underline{10}}$ i między $14^{\underline{05}}$ a $14^{\underline{10}}$.

6. Takie miesiące to styczeń, luty, marzec, maj, lipiec, sierpień, październik i grudzień, czyli jest ich 8 w każdym roku, a w całym wieku było ich 800. Za bardziej skomplikowane rachunki odejmujemy 2 pkt.

7. Każde dziecko jedzie na rowerze dwa razy szybciej niż drugie idzie. Niech t oznacza czas, jaki Jacek jechał na rowerze. W tym czasie Agatka przeszła połowę drogi, którą on przejechał. Drugą połowę tej drogi też pokonała w czasie t, zatem tyle czasu rower leżał nieużywany. W tym czasie, kiedy Agatka pokonywał drugą połowę drogi do roweru (czyli w czasie t), Jacek przeszedł połowę pozostałej do końca drogi (bo Agatka, jadąc 2 razy szybciej, dogoniła go na końcu drogi). Drugą połowę pozostałej drogi też musiał przejść w czasie t. Zatem Jacek poruszał się z prędkością 10 km/h przez czas t, a z prędkością 12 km/h przez czas $2t$ i pokonał w sumie 22 km. Mamy więc równość $10t + 6 \cdot 2t = 22$,skąd $t = 1$. Rower był nieużywany przez 60 minut.

8. Każda ściana dużego sześcianu składa się z 10000 kostek, w sumie widać więc 60000 ścianek. Jednak 8 kostek leży w wierzchołkach, więc widać ich trzy ścianki, z czego dwie muszą być „nieszóstkowe” ścianki. Z kolei kostki leżące na krawędziach muszą dawać jedną ściankę „nieszóstkową”. Tych kostek jest $12\cdot(100–2)=1176$. Szóstek może być zatem najwyżej $60000–(8\cdot2+1176) = 58808$. Za błędy rachunkowe przy poprawnym rozumowaniu przyznajemy 6 pkt.

9. Liczba 24 ma w rozkładzie 3 dwójki i 1 trójkę. Przemnożona przez siebie 24 razy, ma w rozkładzie $3\cdot24=72$ dwójki i 24 trójki. Z kolei liczba 24! ma w rozkładzie $12+6+3+1 = 22$ dwójki (w co drugim czynniku jedną, w co czwartym dwie, w co ósmym trzy i w co szesnastym cztery) oraz $8+2=10$ trójek (w co trzecim czynniku jedną i w co dziewiątym dwie). Zatem największy wspólny dzielnik tych liczb ma 22 dwójki i 10 trójek, czyli wynosi $2^{22}\cdot3^{10}$.

10. 2017 jest liczbą pierwszą, co było tematem zadania na poprzednim meczu, więc nie wymaga uzasadnienia. Dzielniki tej liczby to 1, 2017, 2017^2, ..., 2017^{2017}, czyli jest ich 2018.