

**KONKURS MATEMATYCZNY – KOMA 2012**  
**GINNAZJA – ELIMINACJE SZKOLNE**  
**POSTĘP ARYTMETYCZNY – KONSPEKT WYKŁADU**

---

- 1) Określenie postępu arytmetycznego, przykłady
  - 2) Obliczanie odległych liczb w zadanym postępie arytmetycznym
  - 3) Sumowanie liczb w postępie arytmetycznym
  - 4) Parzystość długości postępu, jego różnicy i kolejnych wyrazów
- 

**Ad 1**

- Postęp stanowią punkty znajdujące się w równych odstępach na osi liczbowej. Wykonujemy po nich skoki, zawsze tej samej długości. Pierwszy kamień oznaczamy  $a$ , ostatni  $z$ . To, jak daleko leży ostatni kamień zależy od tego, gdzie leży pierwszy, i ile jest kamieni rozłożonych po drodze (lub ile skoków musimy wykonać, żeby dotrzeć do ostatniego kamienia – ich liczbę oznaczamy  $n$ ), a także od tego, jak duże są odległości między kamieniami (czyli jak długie są skoki – oznaczamy tę długość  $r$ ). Pierwszy kamień może leżeć w dowolnym miejscu na osi, długość skoku też może być dowolna (całkowita, w tym ujemna – skoki w prawo i w lewo, ułamkowa, a nawet niewymierna).
- Dobre ustawienia kamieni to np. 1, 2, 3, 4, 5... (liczby naturalne); 2, 4, 6, 8, 10... (liczby nieparzyste), -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2... (liczby całkowite), 5, 10, 15, 20, 25... - wielokrotności piątki, 10, 11, 12, ..., 99 – liczby dwucyfrowe itp.
- Skakanie po tego typu kamieniach można rozpocząć od dowolnego miejsca i dowolnie długo kontynuować w obie strony, ale kierunku nie można zmieniać w trakcie skakania. Dowolny fragment postępu arytmetycznego (złożony z kolejnych jego wyrazów) jest też postępem arytmetycznym (bo nie zmieniamy odległości kamieni), niezależnie od tego, w którą stronę po nim skaczemy. Postęp arytmetyczny zostanie zachowany, jeśli kamienie na raz przesuniemy w prawo lub lewo, albo zwiększymy/zmniejszymy w jednakowy sposób odstęp między nimi.
- W języku arytmetyki różnica kolejnych liczb tworzących postęp arytmetyczny (czyli odległość między kamieniami lub długość skoku) jest w całym postępie taka sama.

**Ad 2**

- Przykład. Skaczemy po kolejnych liczbach naturalnych, zaczynamy od 3. Gdzie wylądujemy po 2 skokach? A po 5, 10, 100? W razie potrzeby podać inne przykłady liczbowe.
- Jeśli zaczniemy skakać na osi od liczby  $a$ , skokiem długości  $r$  w prawo, to lądujemy kolejno na kamieniach:  $a+r$ ,  $a+2r$ ,  $a+3r$ , ... Po wykonaniu 17 skoków lądujemy w  $a+16r$ , a po 100 skokach w  $a+99r$ . Kiedy wykonamy  $n$  skoków, lądujemy na kamieniu  $a+(n-1)r$ . Podobnie jest, gdy skaczemy w lewo, tylko wtedy odejmujemy skoki od  $a$ .
- Mówimy, że postęp rośnie, gdy skaczemy w prawo, lub maleje, gdy skaczemy w lewo.
- Wyraz dziesiąty postępu oznaczamy  $a_{10}$ . Inne analogicznie. Pierwszy wyraz postępu oznaczamy też  $a_1$ , a ostatni  $a$  z właściwym numerem tego wyrazu, tzn. który jest w kolejności.
- Ważna jest umiejętność sprawdzania, czy dana liczba pochodzi z ustalonego postępu arytmetycznego, np. czy 40 jest w postępie 3, 7, 11, 15, 19, ... (nie, bo to same liczby nieparzyste – dlaczego?), a 86 lub 93 w postępie 2, 15, 28, 41, 54, ...? Czy skacząc od dwójki skokiem długości 13, dotrzemy do 86? Czy  $2+\square\cdot 13=86$ ? Czy  $\square\cdot 13=84$ ? Nie. Ale skoro  $2+7\cdot 13=93$ , to ile jest wyrazów w tym postępie od 2 do 93 włącznie? Jest 7 skoków (odcinków na osi), a 8 liczb.

**Ad 3**

- Suma liczb ze skrajnych kamieni (tzn.  $a$  i  $z$ ) jest taka sama, jak suma z drugiego i przedostatniego (bo pierwszy składnik wzrasta o  $r$ , a drugi maleje o  $r$ , więc nic się nie zmienia). Podobnie suma trzeciego i przed-przedostatniego (skrajne kamienie możemy odrzucić).
- Suma liczb leżących w tych samych odległościach od kamieni skrajnych jest taka sama, jak suma kamieni skrajnych. Zauważyć przy okazji, jakie numery mają wyrazy równoodległe od skrajnych, np. w postępie o 17 wyrazach są to  $a_1$  i  $a_{17}$ ,  $a_2$  i  $a_{16}$ ,  $a_3$  i  $a_{15}$  itd.. Mają stałą sumę numerów (=18).
- Sumę postępu arytmetycznego, czyli sumę wszystkich liczb z postępu, oznaczamy  $S$ .
- Obliczając sumę postępu, wypisujemy kolejno wszystkie wyrazy i podpisujemy je jeszcze raz w odwróconym porządku. Kamienie skrajne wypadają jeden pod drugim, drugi i przedostatni też, trzeci i przed-przedostatni itd. Zawsze wypadają pod sobą nawzajem kamienie leżące w tej samej odległości od kamieni skrajnych. Podczas sumowania możemy je zastąpić sumą kamieni skrajnych. Jeśli w postępie jest  $n$  liczb, otrzymujemy w ten sposób  $n$  razy sumę  $a+z$ . Ale tym sposobem sumę całego postępu policzyliśmy dwukrotnie, więc bierzemy tylko połowę wyniku. Ostatecznie suma wszystkich liczb postępu arytmetycznego to  $\frac{1}{2} \cdot (a+z) \cdot n$ .
- Jakiś prosty przykład. Uwzględnić techniki sprytnych rachunków i notację z wielokropkiem dla długich postępów.
- Przykłady rozmaite, w tym obliczanie sumy liczb trzycyfrowych, trzycyfrowych wielokrotności dwudziestki itp, gdzie trzeba wyznaczyć  $a$ ,  $z$  i liczbę składników.
- Na ogół przy obliczaniu sum postępów najważniejsze jest wyznaczenie liczby składników. Oblicz sumy  $2+9+16+23+\dots+142$ ,  $223+228+233+\dots+778$ ,  $1+3+5+7+\dots+113$  itd.
- Rozważamy także przykłady postępów malejących, złożonych z liczb o różnych znakach, o wyrazach ułamkowych, z literą, np.  $1+2+3+\dots+5n$  (co to oznacza?) oraz splecione 2 postępy arytmetyczne.

- Tricky stosowane przy obliczaniu sum, a raczej liczby składników. Przykłady typu:  $1+2+3+117$  (117 składników),  $7+8+9+\dots+117$  (117-6 składników), wielokrotności np.  $5+10+15+\dots+125 = 5(1+2+3+\dots+25)$ , inne np.  $2+5+8+11+14+\dots+23 = 0+3+6+9+12+\dots+21 + \text{dwójki} = 3(1+2+3+4+\dots+7) + 8 \cdot 2$ .

#### Ad 4

- Jeśli liczba kamieni (liczb w postępie arytmetycznym) jest nieparzysta, to istnieje wyraz środkowy (oznaczamy go  $c$  - centralny). W przeciwnym razie istnieją dwa wyrazy przyśrodkowe (oznaczamy je  $c_1$  i  $c_2$ ).
- W procesie podpisywania liczb postępu pod sobą w odwróconej kolejności w przypadku nieparzystej liczby kamieni wyraz środkowy wypada pod sobą. To znaczy, że  $a+z = c+c$ . W przypadku parzystej liczby kamieni  $c_2$  wypada pod  $c_1$ , czyli  $a+z = c_1+c_2$ .
- Dla postępów o wyrazach całkowitych jeśli  $r$  jest parzyste, nie zmienia się parzystość wyrazów, a gdy jest nieparzyste, parzystość wyrazów zmienia się na przemian. Obejrzyć na przykładach.

#### UWAGI

1. Czas trwania wykładu z ćwiczeniami: 45-60 min. Czas pisania zadań 60 min.
2. Termin konkursu szkolnego: 19 XI. Termin odesłania wyników: 26 XI.
3. Wyniki w pliku .xls pisane minuskułą. Trzy kolumny: imię/nazwisko/wynik. Nazwa szkoły tylko w nagłówku.
4. Zad. 1-17 - każdy podpunkt oceniamy zero-jedynkowo (4 punkty za zadanie). Zad. 18 - 1 pkt, Zad. 19-20 - 2 pkt (po 1 pkt za każdą odpowiedź).

#### KLUCZ

**Zad. 1.** T N T T  
**Zad. 2.** N T N N  
**Zad. 3.** T T N T  
**Zad. 4.** T N T N  
**Zad. 5.** T T N T  
**Zad. 6.** T N T T  
**Zad. 7.** N T T T  
**Zad. 8.** N T T N  
**Zad. 9.** N T N N  
**Zad. 10.** T N T N  
**Zad. 11.** N T T N  
**Zad. 12.** T N T T

**Zad. 13.**  $7n, 214, 30, 0$

**Zad. 14.**  $-2, -1, 0, 1, 2$

nie ma

nie ma

$-5, -3, -1, 1, 3, 5$

**Zad. 15.**  $-3, -1, 1, 3, 5$

$-1, 0, 1, 2, 3$

$-4, -2, 0, 2, 4, 6$

$-9, -5, -1, 3, 7, 11$

**Zad. 16.**  $1230, (n+5)(n-4)/2, (3n+4)(3n-2), (100n+60)(5n+3)$

**Zad. 17.** 3, nie ma, 6, 8

**Zad. 18.** 7

**Zad. 19.**  $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$  oraz  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

**Zad. 20.**  $a=1\frac{1}{3}, r=1/3$

**KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2012**  
**ELIMINACJE SZKOLNE GIMNAZJUM .....**

Imię i nazwisko: ..... klasa: .....

W zadaniach 1-12 zaznacz prawidłową odpowiedź.

**Zad. 1. Czy podane liczby tworzą postęp arytmetyczny?**

- a) 2, 4, 6, 8, ..., 2000012 TAK / NIE  
 b) 3, 5, 7, 9, ..., 10024 TAK / NIE  
 c) 3, 9, 15, 21, ..., 20025 TAK / NIE  
 d)  $\frac{1}{3}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{3}, \dots, 103$  TAK / NIE

**Zad. 2. Czy suma  $1+5+9+13+17+\dots+117$ :**

- a) ma 29 składników TAK / NIE  
 b) jest równa 1770 TAK / NIE  
 c) jest równa 1771 TAK / NIE  
 d) jest o 30 mniejsza od  $4+8+12+16+20+\dots+120$  TAK / NIE

**Zad. 3. Wiadomo, że liczby  $x, y, z, q$  tworzą postęp arytmetyczny. Czy taki postęp tworzą też liczby:**

- a)  $x+7, y+7, z+7, q+7$  TAK / NIE  
 b)  $7 \cdot x, 7 \cdot y, 7 \cdot z, 7 \cdot q$  TAK / NIE  
 c)  $x^2, y^2, z^2, q^2$  TAK / NIE  
 d)  $x+y, y+y, z+y, q+y$  TAK / NIE

**Zad. 4. Czy podane sumy są obliczone poprawnie?**

- a)  $\frac{2}{7} + \frac{5}{7} + \frac{8}{7} + \dots + \frac{23}{7} = 14\frac{2}{7}$  TAK / NIE  
 b)  $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{6}{5} + \dots + \frac{88}{5} = 374$  TAK / NIE  
 c)  $1+2+4+5+7+8+\dots+31=331$  TAK / NIE  
 d)  $1-2+3-4+5-\dots+77=0$  TAK / NIE

**Zad. 5. Czy istnieje postęp arytmetyczny zaczynający się od 1, kończący na 10 i o jednym z wyrazów równym**

- a) 5 TAK / NIE  
 b) 3,14 TAK / NIE  
 c) 1355/113 TAK / NIE  
 d) 4 TAK / NIE

**Zad. 6. Czy istnieje 5-wyrazowy postęp arytmetyczny o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma**

- a) 5 wyrazów nieparzystych TAK / NIE  
 b) 4 wyrazy nieparzyste i 1 parzysty TAK / NIE  
 c) 3 wyrazy nieparzyste i 2 parzyste TAK / NIE  
 d) 2 wyrazy nieparzyste i 3 parzyste TAK / NIE

**Zad. 7. Suma dwucyfrowych liczb nieparzystych jest**

- a) parzysta TAK / NIE  
 b) większa od 1500 TAK / NIE  
 c) podzielna przez 5 TAK / NIE  
 d) większa od sumy dwucyfrowych liczb parzystych TAK / NIE

**Zad. 8. Czy w dowolnym 10-wyrazowym postępie arytmetycznym zachodzi równość:**

- a)  $a_1+a_{10} = a_3+a_7$  TAK / NIE  
 b)  $a_3+a_9 = 2a_6$  TAK / NIE  
 c)  $a_2+a_9 = a_5+a_6$  TAK / NIE  
 d)  $a_3+a_8 = 2a_5$  TAK / NIE

**Zad. 9. Czy  $1+3+5+\dots+n$  dzieli się przez 3 dla:**

- a)  $n = 2007$  TAK / NIE  
 b)  $n = 2009$  TAK / NIE  
 c)  $n = 2011$  TAK / NIE  
 d)  $n = 2013$  TAK / NIE

**Zad. 10. Suma postępu  $n$ -wyrazowego o wyrazach całkowitych jest podzielna przez  $n$ . Czy to jest prawdą dla**

- a)  $n=2009$  TAK / NIE  
 b)  $n=2010$  TAK / NIE  
 c)  $n=2011$  TAK / NIE  
 d)  $n=2012$  TAK / NIE

