Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2019/20

Mecz 1 (licea, runda eliminacyjna)

1. Adam i Dominik chcą dostać się z Grogrodu do Polipolis Śląskiego. Odległość między tymi miastami to 40 km. Mają jeden rower, na którym może jechać tylko jedna osoba. Adam chodzi z prędkością 4 km/h, a jeździ na rowerze z prędkością 30 km/h. Dla Dominika prędkości te to odpowiednio 6 km/h i 20 km/h. Rower można zostawić na trasie, ale Adam i Dominik nie lubią komplikacji, więc można to zrobić tylko raz, pomijamy czas wsiadania i zsiadania. W jakim czasie najszybciej obydwaj koledzy mogą się znaleźć w Polipolis?

2. Na ile sposobów można rozdać 7 identycznych nagród czterem rozróżnialnym laureatom Dolnośląskiego Meczu Matematycznego (nie każdy musi dostać nagrodę)?

3. Znajdź wszystkie funkcje $f : (0, \infty) \longmapsto (0, \infty)$ spełniające równanie:

$$f(x) + \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = 2.$$

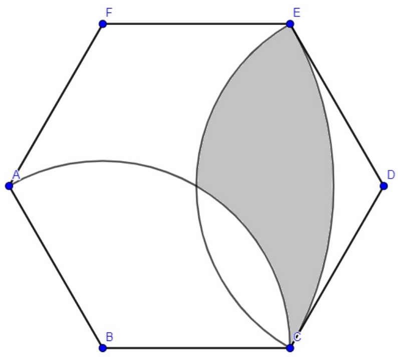
4. Dozorca latarni morskiej w Niechorzu numeruje schody prowadzące na platformę widokową, naklejając cyfry na stopnie. Niestety w jego zestawie naklejek brakuje cyfr 5 i 7. Jeśli podczas numerowania natrafia na liczbę zawierającą w swoim zapisie cyfrę 5 lub 7, to wówczas numeruje stopień najmniejszą liczbą większą od niej niezawierającą w zapisie piątki ani siódemki. Na szczyt prowadzi 210 schodów. Ile naklejek w kształcie cyfry 2 zużyje do oznaczenia schodów?

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Dwusieczne kątów $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ przecinają boki BC, AC i AB odpowiednio w punktach: D, E i F. Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie DEF i O będzie środkiem ω. Dodatkowo niech G będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$ i okręgu ω różnym od D. Wykaż, że

$$\sphericalangle EDO + 90^\circ = \sphericalangle EGA.$$

6. Która z liczb jest większa: $2^{2019} \cdot 2019!$ czy 2020^{2020}?

7. Wiedząc, że $ABCDEF$ jest sześciokątem foremnym o boku 1, oblicz pole szarego obszaru.
Uwaga: środki okręgów, których łuki pokazano na rysunku, znajdują się w punktach A, B oraz D.



8. Mając dany trójkąt, skonstruuj (za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki) kwadrat o takim samym polu.

9. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$, reszta z dzielenia p^2 przez 24 wynosi 1.

10. Znajdź liczbę naturalnych rozwiązań równania

$$p^p n^k = k^n$$

w zależności od liczby pierwszej p.

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2019/20

Mecz 2 (licea, runda eliminacyjna)

1. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych $a, b \in [0,1]$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)} \leqslant 1$$

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ taki, że $\sphericalangle DAB < \sphericalangle ABC$ i $|AD| < \frac{1}{2}|AB|$. Niech h będzie wysokością tego równoległoboku opuszczoną na bok AB. Niech E będzie środkiem boku AB a k - prostą prostopadłą do AB przechodzącą przez E. Niech F będzie punktem przecięcia przekątnej DB i prostej k. Pokaż, że $|EF| > \frac{1}{2}h$.

3. Dawid gra w następującą grę: rzuca trzema dwunastościennymi kostkami i oblicza sumę wyrzuconych oczek. Wygrywa, jeśli ta suma dzieli się przez 3 oraz nie ma wśród tych trzech kostek dwóch z takim samym wynikiem. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej Dawida?

4. Niech a będzie liczbą całkowitą. Dla jakich wartości a wielomian $x^3 + 3ax^2 + 2ax + a$ ma pierwiastek wymierny?

5. Liczbą fajną nazwiemy liczbę, której cyfry w zapisie pozycyjnym o podstawie 26 uporządkowane są monotonicznie (niemalejąco bądź nierosnąco), oraz żadna z nich nie jest jedynką. Ile jest liczb fajnych, których iloczyn cyfr w zapisie pozycyjnym o podstawie 26 wynosi 10125? *(Wszystkie liczby w treści zadania zapisane są w systemie dziesiętnym)*

6. Czy istnieje funkcja $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taka, że $g(mn) = g(m) + g(n) + 3g(n)g(m)$ oraz $g(0) \neq 0$?
Uwaga: $\mathbb{N}_0$ *oznacza zbiór liczb naturalnych wraz z zerem.*

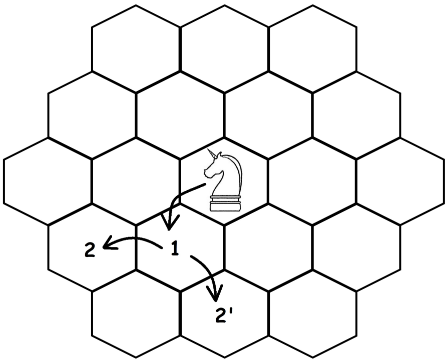
7. Czy istnieje ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wszystkie krawędzie mają tę samą długość?

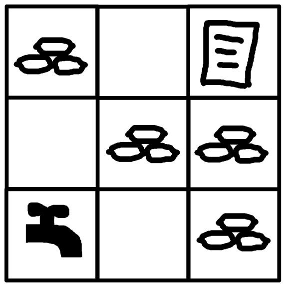
8. W każde pole szachownicy o wymiarach 2019×2019 wpisano jedną z liczb 1, 2 i 3 w taki sposób, że w każdym pionowym lub poziomym prostokącie o wymiarach 1×3 albo znajdują się 3 takie same, albo 3 różne liczby. Na ile sposobów można tak ponumerować pola szachownicy?

9. W Grafii Abstrakckiej celem usprawnienia pracy wprowadzono następujące prawo: tydzień ma tam 8 dni, z czego 3 ostatnie są wolne od pracy, ponadto nie występują tam święta wolne od pracy. Dodatkowo pierwszy dzień roku zawsze jest pierwszym dniem tygodnia (na koniec roku może pojawić się niepełny tydzień). Mieszkający tam Harmoniusz zarabia 330€ za dzień spędzony w pracy, a na życie wydaje codziennie 140€. Chciałby on raz wyjechać na urlop w góry w roku 2020. Dzień w górach kosztuje go 870€. Na ile najwyżej dni może wyjechać?
Uwaga: Harmoniusz może wziąć darmową pożyczkę na dowolną kwotę, ale musi ją spłacić do końca roku, a wypłata/zapłata rachunków odbywa się przed końcem konkretnego dnia.

10. Pokaż, że dla dowolnej liczby $\beta \in (0, \frac{\pi}{4})$ zachodzi $1 - tg\beta + tg^2\beta - tg^3\beta + \ldots = \frac{\sqrt{2}cos\beta}{2sin(\beta+\frac{\pi}{4})}$.

1. W magicznych szachach Martynki są sześciokątne pola, a jedną z figur jest jednorożec. Jednorożec porusza się według następującego schematu: najpierw skacze nad sąsiednim polem (1), a następnie ląduje na jednym z dwóch pól sąsiadujących z polem 1 (2 lub 2′), takim że wspomniane trzy pola nie leżą w linii prostej i końcowe pole nie sąsiaduje z jego pierwotnym polem (patrz rysunek). Czy po planszy do tej gry (zaprezentowanej na tym samym rysunku) zaczynając od dowolnego pola da się przejść jednorożcem w taki sposób, aby odwiedził on każde pole dokładnie raz? (Pole 1 *nie* jest odwiedzone w przykładowym ruchu).





Przykładowe rozmieszczenie worków chroniące cenne zadanie.

2. TRAGEDIA!! Mateuszowi zepsuł się kran w łazience i nieustannie cieknie. Postanowił on zabarykadować niektóre pokoje workami z piaskiem, tak żeby woda nie dotarła do jego biurka, na którym trzyma drogocenne rozwiązanie zadania z matematyki. Mieszkanie Mateusza ma plan kwadratu podzielonego na 9 kwadratowych pokoi (patrz rys.), z których każdy łączy się dokładnie z pokojami, z którymi sąsiaduje ścianą, a woda rozlewa się do wszystkich sąsiadujących pokoi. Łazienka i pokój z biurkiem znajdują się w przeciwległych rogach mieszkania. Ile jest możliwych ustawień worków, w których pokój nie zostaje zalany (Mateusz nie chce obkładać workami zalanej już łazienki ani potrzebnego mu pokoju biurowego)?

3. Niech x będzie liczbą rzeczywistą większą od 2. Pokaż, że $\frac{x^2-3x+4}{2x-4} \geqslant \sqrt{x}$.

4. Pokaż, że dla x całkowitych wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ nie przyjmuje wartości będących liczbami pierwszymi.

5. Niech $\pi(n)$ dla liczby naturalnej n oznacza iloczyn jej *niezerowych* cyfr. Oblicz $\pi(1) + \pi(2) + \cdots + \pi(998)$.

6. Przedsiębiorca Janusz chce postawić fabrykę Całko-Coli, której proces produkcyjny wygląda następująco: najpierw trzeba wydobyć wodę gruntową, następnie ją oczyścić, rozmieszać z koncentratem i ostatecznie dodać barwniki. Pan Janusz ma do dyspozycji 1155 m^2 gruntu. Na każdym metrze kwadratowym w godzinę jesteśmy w stanie wydobyć 10 l wody gruntowej albo oczyścić 5 l wody, albo rozmieszać 3 l wody z koncentratem (uzyskując 4 l prawie-coli), albo dodać barwniki do 6 l prawie-coli (objętość barwników jest pomijalna). Jaką największą ilość Całko-Coli Pan Janusz może wytworzyć w godzinę?
Uwaga: na każdy z etapów produkcji można przeznaczyć dowolną ilość powierzchni, także niecałkowitą.

7. Mając dany wielokąt wypukły w, skonstruuj za pomocą cyrkla i linijki bez podziałki (lub udowodnij, że jest to możliwe, jeśli nie masz ich pod ręką) prostą, która dzieli wielokąt w na dwa wielokąty o równych obwodach.

8. Ze zbioru n kul ponumerowanych od 1 do n (każda kula oznaczona jednym numerem) losujemy kolejno bez zwracania dwie kule. Numery wylosowanych kul tworzą parę uporządkowaną (a,b). Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb spełniających warunek $|a-b| = 2$ jest większe od $\frac{1}{4}$?

9. Dany jest trójkąt ABC. Niech D będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$ i środkowej poprowadzonej z punktu A. Mając dane długości odcinków AB i BC, oblicz stosunek pól trójkątów ABC i DBC.

10. Dane są dwa nieskończone niemalejące ciągi arytmetyczne $a_1, a_2, a_3, ...$ i $b_1, b_2, b_3, ...$ składające się z liczb całkowitych dodatnich. Ciągi te posiadają następującą własność: dla każdego n dokładnie jedna z liczb a_n i b_n jest liczbą pierwszą. Pokaż, że co najmniej jeden z tych ciągów ma różnicę równą 0.