

KONKURS MATEMATYCZNY – KOMA 2012
SZKOŁY PODSTAWOWE – ELIMINACJE SZKOLNE
ŻABIE SKOKI, CZYLI POSTĘP ARYTMETYCZNY – KONSPEKT WYKŁADU

- 1) Określenie postępu arytmetycznego, przykłady
 - 2) Obliczanie odległych liczb w zadanym postępie arytmetycznym
 - 3) Sumowanie liczb w postępie arytmetycznym
 - 4) Parzystość długości postępu, jego różnicy i kolejnych wyrazów
-

Ad 1

- Kamienie ustawione w równych odstępach na osi liczbowej. Po kamieniach skaczą żaby. Wykonują skoki tej samej długości z kamienia na kolejny kamień. Jak daleko skoczy żaba (ostatni kamień oznaczamy z) zależy od tego, od którego kamienia zacznie (oznaczamy go a), jak długie skoki wykonuje (długość oznaczamy r) i ile takich skoków wykona (ich liczbę oznaczamy n). Początek może być w dowolnym miejscu na osi, długość skoku też może być dowolna, choć w większości przypadków zajmujemy się wielkościami całkowitymi. Z młodszymi lub słabszymi uczniami można pracować tylko na liczbach naturalnych, wykreślając stosowne przykłady z zadań.
- Dobre ustawienia kamieni to np. 1, 2, 3, 4, 5... (liczby naturalne); 2, 4, 6, 8, 10... (liczby nieparzyste), -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2... (liczby całkowite), 5, 10, 15, 20, 25... - wielokrotności piątki, 10, 11, 12, ..., 99 – liczby dwucyfrowe itp.
- Skakanie po tego typu kamieniach można rozpocząć od dowolnego miejsca i dowolnie długo kontynuować w obie strony (ale kierunku nie można zmieniać w trakcie skakania). Dowolny fragment postępu arytmetycznego (złożony z kolejnych jego wyrazów) jest postępem arytmetycznym (bo nie zmieniamy odległości kamieni), niezależnie od tego, w którą stronę po nim skaczemy. Postęp arytmetyczny zostanie zachowany, jeśli kamienie na raz przesuniemy w prawo lub lewo, albo zwiększymy/zmniejszymy w jednakowy sposób odstęp między nimi.
- W terminach matematycznych różnica kolejnych liczb tworzących postęp arytmetyczny (czyli odległość między kamieniami lub długość skoku żaby) jest w całym postępie zawsze taka sama (można mówić, że ta różnica jest dodatnia lub ujemna ale nie ma takiej konieczności).

Ad 2

- Przykład. Skaczemy po kolejnych liczbach naturalnych, zaczynamy od 3. Gdzie wylądujemy po 2 skokach? A po 5, 10, 100? W razie potrzeby podać inne przykłady liczbowe.
- Jeśli zaczniemy skakać na osi od liczby a , skokiem długości r w prawo, to lądujemy kolejno na kamieniach: $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, ... Po wykonaniu 17 skoków lądujemy w $a+16r$, a po 100 skokach w $a+99r$. Kiedy wykonamy n skoków, lądujemy na kamieniu $a+(n-1)r$. Podobnie jest, gdy skaczemy w lewo, tylko wtedy odejmujemy skoki od a .
- Mówimy, że postęp rośnie, gdy skaczemy w prawo, lub maleje, gdy skaczemy w lewo.
- Wyraz dziesiąty postępu oznaczamy a_{10} . Inne analogicznie. Pierwszy wyraz postępu oznaczamy a (lub a_1), a ostatni z (lub a z właściwym numerem tego wyrazu, tzn. który jest w kolejności).
- Ważna jest umiejętność sprawdzenia, czy dana liczba pochodzi z ustalonego postępu arytmetycznego, np. czy 40 jest w postępie 3, 7, 11, 15, 19, ... (nie, bo to same liczby nieparzyste – dlaczego?), a 86 lub 93 w postępie 2, 15, 28, 41, 54, ...? Czy skacząc od dwójki skokiem długości 13, dotrzemy do 86? Czy $2+\square \cdot 13=86$? Czy $\square \cdot 13=84$? Nie. Ale skoro $2+7 \cdot 13=93$, to ile jest wyrazów w tym postępie od 2 do 93 włącznie? Jest 7 skoków (odcinków na osi), a 8 liczb.

Ad 3

- Suma liczb ze skrajnych kamieni (tzn. z pierwszego i ostatniego) jest taka sama, jak suma z drugiego i przedostatniego (bo pierwszy składnik wzrasta o r , a drugi maleje o r , więc nic się nie zmienia). Podobnie suma trzeciego i przedostatniego (skrajne kamienie możemy odrzucić).
- Suma liczb leżących w tych samych odległościach od kamieni skrajnych jest taka sama, jak suma kamieni skrajnych. Zauważyć przy okazji, jakie numery mają wyrazy równoodległe od skrajnych, np. w postępie o 17 wyrazach są to a_1 i a_{17} , a_2 i a_{16} , a_3 i a_{15} itd.. Mają stałą sumę numerów (=18).
- Sumę postępu arytmetycznego, czyli sumę wszystkich liczb z postępu, oznaczamy s .
- Obliczając sumę postępu, wypisujemy kolejno wszystkie wyrazy i podpisujemy je jeszcze raz w odwróconym porządku. Kamienie skrajne wypadają jeden pod drugim, drugi i przedostatni też, trzeci i przedostatni itd. Zawsze wypadają pod sobą nawzajem kamienie leżące w tej samej odległości od kamieni skrajnych. Podczas sumowania możemy je zastąpić sumą kamieni skrajnych. Jeśli w postępie jest n liczb, otrzymujemy w ten sposób n razy sumę $a+z$. Ale tym sposobem sumę całego postępu policzyliśmy dwukrotnie, więc bierzemy tylko połowę wyniku. Ostatecznie suma wszystkich liczb postępu arytmetycznego to $\frac{1}{2} \cdot (a+z) \cdot n$.
- Jakiś prosty przykład. Uwzględnić techniki sprytnych rachunków i notację z wielokropkiem dla długich postępów.
- Przykłady rozmaite, w tym obliczanie sumy liczb trzycyfrowych, trzycyfrowych wielokrotności dwudziestki itp, gdzie trzeba wyznaczyć a , z i liczbę składników.
- Na ogół przy obliczaniu sum postępów najważniejsze jest wyznaczenie liczby składników. Oblicz sumy $2+9+16+23+\dots+142$, $223+228+233+\dots+778$, $1+3+5+7+\dots+113$ itd.

- Rozważamy także przykłady postępów malejących, złożonych z liczb o różnych znakach, o wyrazach ułamkowych, z literą, np. $1+2+3+\dots+5n$ (co to oznacza?) oraz splecione 2 postępy arytmetyczne – w młodszych lub słabszych klasach można te przykłady opuścić i wykreślić stosowne zadania.
- Tricky stosowane przy obliczaniu sum, a raczej liczby składników. Przykłady typu: $1+2+3+117$ (117 składników), $7+8+9+\dots+117$ (117-6 składników), wielokrotności np. $5+10+15+\dots+125 = 5(1+2+3+\dots+25)$, inne np. $2+5+8+11+14+\dots+23 = 0+3+6+9+12+\dots+21 + \text{dwójki} = 3(1+2+3+4+\dots+7) + 8 \cdot 2$.

Ad 4

- Jeśli liczba kamieni (liczb w postępie arytmetycznym) jest nieparzysta, to istnieje wyraz środkowy (oznaczamy go c - centralny). W przeciwnym razie istnieją dwa wyrazy przyśrodkowe (oznaczamy je c_1 i c_2).
- W procesie podpisywania liczb postępu pod sobą w odwróconej kolejności w przypadku nieparzystej liczby kamieni wyraz środkowy wypada pod sobą. To znaczy, że $a+z = c+c$. W przypadku parzystej liczby kamieni c_2 wypada pod c_1 , czyli $a+z = c_1+c_2$.
- Dla postępów o wyrazach całkowitych jeśli r jest parzyste, nie zmienia się parzystość wyrazów, a gdy jest nieparzyste, parzystość wyrazów zmienia się na przemian. Obejrzeć na przykładach.

UWAGI

1. Czas trwania wykładu z ćwiczeniami: 45-60 min. Czas pisania zadań 60 min.
2. Termin konkursu szkolnego: 12 XI. Termin odesłania wyników: 19 XI.
3. Wyniki w pliku .xls pisane minuskułą. Trzy kolumny: imię/nazwisko/wynik. Nazwa szkoły w nagłówku.
4. Każdy podpunkt oceniamy zero-jedynkowo (4 punkty za każde zadanie). Zad. 17 1 pkt, Zad. 18 po 1 pkt za każdą odpowiedź.

KLUCZ

Zad. 1. N T N N
Zad. 2. T N T N
Zad. 3. N T N N
Zad. 4. T T N T
Zad. 5. T N T N
Zad. 6. T T N T
Zad. 7. T N T T
Zad. 8. N T T T
Zad. 9. N T T N
Zad. 10. N T N N
Zad. 11. T N T N
Zad. 12. N T T N

Zad. 13. $7n, 214, 30, 0$
Zad. 14. $-2, -1, 0, 1, 2$
 nie ma
 nie ma
 $-5, -3, -1, 1, 3, 5$
Zad. 15. $-3, -1, 1, 3, 5$
 $-1, 0, 1, 2, 3$
 $-4, -2, 0, 2, 4, 6$
 $-9, -5, -1, 3, 7, 11$
Zad. 16. 153, 6900, 1280, 1230
Zad. 17. 7
Zad. 18. $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$ oraz $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2012**ELIMINACJE SZKOLNE****SZKOŁA PODSTAWOWA**

Imię i nazwisko:

klasa:

W zadaniach 1-12 zaznacz prawidłową odpowiedź.**Zad. 1. Czy podane liczby tworzą postęp arytmetyczny?**

- a) 1, 11, 111, 1111 TAK / NIE
 b) -23, -16, -9, -2, 5 TAK / NIE
 c) $\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, 2, $\frac{8}{3}$, 3 TAK / NIE
 d) 1, 2, 1, 2, 1, 2 TAK / NIE

Zad. 2. Czy podane liczby tworzą postęp arytmetyczny?

- a) 2, 4, 6, 8, ..., 2000012 TAK / NIE
 b) 3, 5, 7, 9, ..., 10024 TAK / NIE
 c) 3, 9, 15, 21, ..., 20025 TAK / NIE
 d) 3, 8, 13, 18, ..., 115 TAK / NIE

Zad. 3. Czy suma $1+5+9+13+17+\dots+117$

- a) ma 29 składników TAK / NIE
 b) jest równa 1770 TAK / NIE
 c) jest równa 1771 TAK / NIE
 d) jest o 30 mniejsza od $4+8+12+16+20+\dots+120$ TAK / NIE

Zad. 4. Wiadomo, że liczby x, y, z, q tworzą postęp arytmetyczny. Czy taki postęp tworzą też liczby:

- a) $x+7, y+7, z+7, q+7$ TAK / NIE
 b) $7\cdot x, 7\cdot y, 7\cdot z, 7\cdot q$ TAK / NIE
 c) x^2, y^2, z^2, q^2 TAK / NIE
 d) $x+y, y+y, z+y, q+y$ TAK / NIE

Zad. 5. Czy podane sumy są obliczone poprawnie?

- a) $2/7 + 5/7 + 8/7 + \dots + 23/7 = 14$ i $2/7$ TAK / NIE
 b) $2/5 + 4/5 + 6/5 + \dots + 88/5 = 374$ TAK / NIE
 c) $1+2+4+5+7+8+10+\dots+31 = 331$ TAK / NIE
 d) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 77 = 0$ TAK / NIE

Zad. 6. Czy istnieje postęp arytmetyczny zaczynający się od 1, kończący na 10 i jednym z wyrazów równym

- a) 5 TAK / NIE
 b) 3,14 TAK / NIE
 c) 1355/113 TAK / NIE
 d) 4 TAK / NIE

Zad. 7. Czy istnieje 5-wyrazowy postęp arytmetyczny o wyrazach całkowitych dodatnich, który ma

- a) 5 wyrazów nieparzystych TAK / NIE
 b) 4 wyrazy nieparzyste i 1 parzysty TAK / NIE
 c) 3 wyrazy nieparzyste i 2 parzyste TAK / NIE
 d) 2 wyrazy nieparzyste i 3 parzyste TAK / NIE

Zad. 8. Suma dwucyfrowych liczb nieparzystych jest

- a) parzysta TAK / NIE
 b) większa od 1500 TAK / NIE
 c) większa od sumy dwucyfrowych liczb parzystych TAK / NIE
 d) podzielna przez 5 TAK / NIE

Zad. 9. Czy w dowolnym 10-wyrazowym postępie arytmetycznym zachodzi dana równość?

- a) $a_1+a_{10} = a_3+a_7$ TAK / NIE
 b) $a_3+a_9 = 2a_6$ TAK / NIE
 c) $a_2+a_9 = a_5+a_6$ TAK / NIE
 d) $a_3+a_8 = 2a_5$ TAK / NIE

Zad. 10. Czy $1+3+5+\dots+$ dzieli się przez 3 dla danych n ?

- a) $n = 2007$ TAK / NIE
 b) $n = 2009$ TAK / NIE
 c) $n = 2011$ TAK / NIE
 d) $n = 2013$ TAK / NIE

Zad. 11. Suma postępu arytmetycznego n -wyrazowego o wyrazach będących liczbami naturalnymi, jest podzielna przez n . Czy to musi być prawdziwe dla podanych n ?

- a) $n=2009$ TAK / NIE
 b) $n=2010$ TAK / NIE
 c) $n=2011$ TAK / NIE
 d) $n=2012$ TAK / NIE

Zad. 12. W postępie arytmetycznym pierwszy wyraz jest równy 1, a n -ty wyraz jest równy 21. Czy wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi, jeżeli:

- a) $n=4$ TAK / NIE
 b) $n=5$ TAK / NIE
 c) $n=6$ TAK / NIE
 d) $n=7$ TAK / NIE

W zadaniach 13-18 podaj krótką odpowiedź w każdym przykładzie.

Zad. 13. Ile jest liczb w tym postępie arytmetycznym?

- a) 1, 2, 3, 4, ..., $7n$
 b) 18, 20, 22, 24, ..., 444
 c) dwucyfrowe podzielne przez 3
 d) odwrotności liczb naturalnych

Zad. 14. Podaj przykład postępu arytmetycznego o sumie wyrazów równej zero oraz:

- a) o 5 wyrazach, w tym jednym równym 0

 b) o 5 wyrazach i żadnym równym 0

 c) o 6 wyrazach, w tym jednym równym 0

 d) o 6 wyrazach i żadnym równym 0

Zad. 15. Podaj przykład postępu, który ma:

- a) 5 wyrazów, sumę 5 i jeden wyraz równy 5

 b) 5 wyrazów, sumę 5 i żadnego wyrazu równego 5

 c) 6 wyrazów, sumę 6 i jeden wyraz równy 6

 d) 6 wyrazów, sumę 6 i żadnego wyrazu równego 6

Zad. 16. Oblicz sumę liczb w postępie arytmetycznym.

- a) $1+2+3+\dots+17 =$
 b) $3+4+5+\dots+117 =$
 c) $5+15+25+35+\dots+155 =$
 d) $-17-13-9-\dots+99 =$

Zad. 17. Liczby 2, $x-3$, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem postępu arytmetycznego. Oblicz x .

.....

Zad. 18. W pewnym trójkącie jeden z kątów jest trzy razy większy od drugiego, a miary wszystkich kątów tego trójkąta tworzą postępowanie arytmetyczne. Jakie są miary tych kątów?

.....