Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2019/20

Mecz 1 (SP 4-6, runda eliminacyjna)

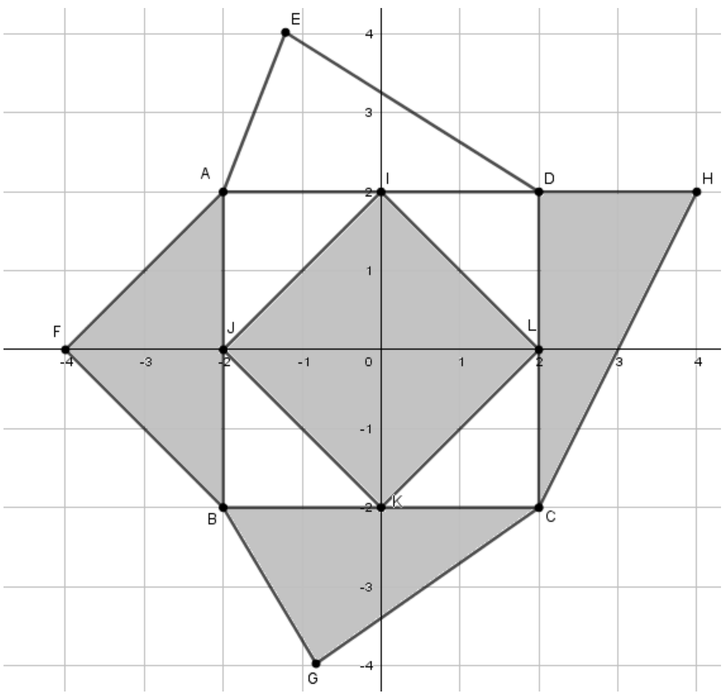
1. Dla jakich liczb całkowitych x liczba $\frac{24}{x+1}$ też jest liczbą całkowitą?

2. Oblicz **sprytnie** wartość wyrażenia

$$1 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 8 \cdot 9 + 10 \cdot 11 \cdot 12}{2 \cdot 2 \cdot 3 + 8 \cdot 5 \cdot 6 + 14 \cdot 8 \cdot 9 + 20 \cdot 11 \cdot 12}.$$

3. Dwie liczby całkowite a i b mają tę samą odległość od zera na osi liczbowej. Suma tych liczb jest liczbą parzystą dodatnią, różnica zaś jest liczbą nieparzystą ujemną. Podaj wszystkie liczby a i b, które spełniają te warunki lub udowodnij, że taka para nie istnieje.

4. Jaką część pola figury $AFBGCHDE$ stanowi zacieniowana figura?



5. Pewien numer telefonu składa się z 9 cyfr, ustawionych na miejscach numerowanych od lewej. Wiadomo, że:

• pierwszą cyfrą jest największa liczba pierwsza mniejsza od 10;
• numer telefonu jest liczbą podzielną przez 25;
• cyfra 0 nie występuje w tym numerze telefonu;
• cyfry parzyste mogą występować tylko na nieparzystych miejscach;
• cyfry trzecia, czwarta i piąta w kolejności występowania tworzą trzycyfrową liczbę podzielną przez 897;
• cyfry siódma i ósma w kolejności występowania tworzą liczbę będącą sześcianem liczby podzielnej przez 3.

Ile jest numerów telefonów spełniających powyższe warunki?

6. Krzyś zakupił rower elektryczny za 3000 zł. Po pewnym czasie, ze względu na usterkę baterii, musiał wydać jeszcze 800 zł na naprawę. Gdy nastała zima, Krzyś zdecydował, że spróbuje sprzedać swój rower. Dzięki skutecznej reklamie sprzedał go za kwotę 4500 zł. Na wiosnę ponownie zapragnął własnego jednośladu. Niestety, był to okres, który cechują wysokie ceny w branży rowerowej. Dlatego zakupił rower za 5100 zł. Po upływie pewnego czasu Krzyś zdecydował, że chce zmienić rower na hulajnogę. Sprzedał więc Marysi swój rower za kwotę 4900 zł, ale zobligował się, że dołoży jej jeszcze 100 zł na wymianę tylnej opony. Czy Krzyś na tych wszystkich transakcjach związanych z rowerem zyskał, czy stracił?

7. W pewnym przedsiębiorstwie zatrudnionych jest pięcioro pracowników. Swoją dzienną pracę wykonują w 8 h. Ze względu na okres przedświąteczny do wykonania jest dwukrotnie więcej pracy niż normalnie. Do pomocy przydzielono dodatkowych troje pracowników. Ile godzin każdy z pracowników musi pracować dziennie w tym okresie, aby zespół wykonał wszystkie zadania?

8. Pewien trójkąt ma taką własność, że wszystkie jego wysokości mają tę samą długość. Wykaż, że jest to trójkąt równoboczny.

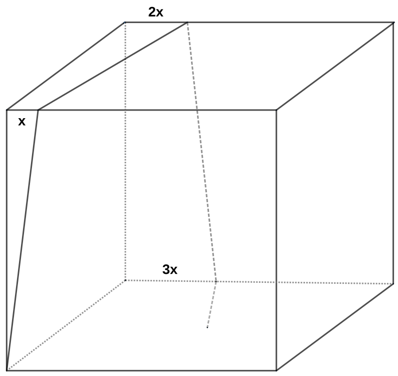
9. Do sześcianu, którego ściana jest kwadratem o obwodzie 20 m, przyłożono identyczny sześcian tak, że zetknęły się ze sobą ścianami. Ile puszek farby potrzeba, aby pomalować otrzymaną bryłę, jeżeli jedna puszka wystarcza na pomalowanie 15 m^2?

10. Alicja czytała powieść historyczną, która ma 240 stron. Pierwszego dnia przeczytała $\frac{1}{5}$ książki. Drugiego przeczytała $\frac{1}{6}$ liczby stron, jaką przeczytała pierwszego dnia. Trzeciego dnia przeczytała $\frac{1}{8}$ liczby stron, jaką przeczytała drugiego dnia. Czwartego dnia nie czytała wcale. Piątego dnia przeczytała $\frac{2}{5}$ całkowitej liczby stron książki. Szóstego przeczytała o 14 stron więcej niż w sumie dnia drugiego i trzeciego. Siódmego dnia Karol zauważył: „Jeżeli dalej będziesz czytała tyle samo, co w tym tygodniu, to nie skończysz tej książki w miesiąc”. Czy Karol miał wtedy rację?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2019/20

Mecz 2 (SP 4-6, runda eliminacyjna)

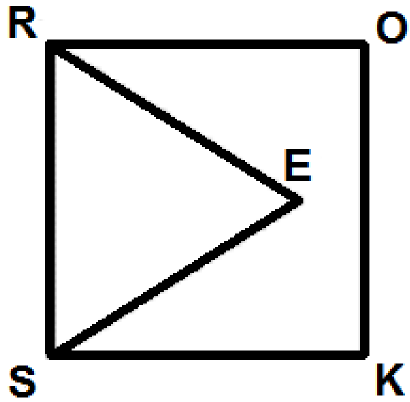
1. Jacek i Agatka przywieźli z sadu 34 jabłka. Chcą rozdzielić je wszystkie między siebie tak, aby liczba jabłek każdego z nich była liczbą pierwszą. Na ile sposobów mogą to zrobić?
2. Duduś i Poldek nudzą się w drodze nad morze i grają w grę. Duduś wybiera sobie liczbę naturalną i podnosi ją do kwadratu, a Poldek podaje resztę z dzielenia tego kwadratu przez 10. Podaj wszystkie wyniki, jakie może otrzymać Poldek.
3. Po sześcianie o krawędzi 2019 podróżuje gąsienica. Zaczyna swą podróż w wierzchołku i tupta po linii prostej, tak jak na rysunku, aż dojdzie do innego wierzchołka. Do którego wierzchołka sześcianu dojdzie gąsienica, jeżeli $x = 1$? Uwaga: po napotkaniu krawędzi gąsienica przechodzi na kolejną ścianę sześcianu tak, że jeżeli rozłożymy dwie ściany przylegające do tej krawędzi na płasko, to trasa gąsienicy będzie odcinkiem.



4. Japoński mistrz origami Zegnesobiesam miał kwadratową kartkę papieru o boku 1 cm. Złożył ją raz, a potem drugi wzdłuż prostoliniowych zagięć tak, aby otrzymać płaską figurę o najmniejszym możliwym polu. Znajdź wszystkie takie płaskie origami, jakie mógł otrzymać mistrz.
5. W zielonej szkole w Myśliborzu brało udział 58 uczniów. Zapełnili doszczętnie wszystkie dostępne pokoje (były pięcio- i siedmioosobowe). Ile mogło być tych pokoi?
6. Przekątne równoległoboku o obwodzie 40 cm dzielą go na cztery trójkąty. Dwa z nich różnią się obwodami o 8 cm. Oblicz długości boków równoległoboku.
7. Dokładnie jedno z poniższych zdań (A, B, C i D) jest prawdziwe. Które?
   A. Dokładnie jedno z tych zdań jest fałszywe.
   B. Dokładnie dwa z tych zdań są fałszywe.
   C. Dokładnie trzy z tych zdań są fałszywe.
   D. Dokładnie trzy z tych zdań są prawdziwe.
8. Pewien trójkąt ma pole $\frac{1}{2}$ cm^2. Dwa z jego boków mają długość 1 cm. Jakie miary mają kąty tego trójkąta? Uzasadnij, że istnieje tylko jeden taki trójkąt.
9. Ile liczb spełnia równanie $(2x + 6) \cdot (x^2 + 9) \cdot (x^3 + 1) = 0$?
10. Ambroży napisał pewną liczbę trzycyfrową, ale kleks zamazał cyfry setek i dziesiątek. Została tylko piątka, cyfra jedności. Ambroży nie pamięta swojej liczby, ale pamięta, że iloczyn ukrytych cyfr był od niej 25 razy mniejszy. Jaka to mogła być liczba?

Dolnośląskie Mecze Matematyczne 2019/20

Mecz 3 (SP 4-6, runda eliminacyjna)



1. Trójkąt SER jest równoboczny. Czy pole pięciokąta KSERO jest mniejsze niż połowa pola kwadratu SROK?

2. Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 13?

3. Tato ma 41 lat, a jego dzieci 14, 9 i 6 lat. Za ile lat tato będzie miał tyle lat, co jego dzieci razem?

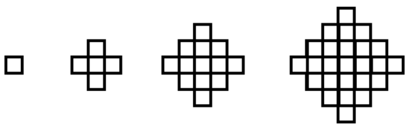
4. Sześcienną kostkę pomalowano na czerwono i rozcięto na 64 jednakowe mniejsze kostki. Ile z nich ma dokładnie jedną ściankę czerwoną?

5. Czy istnieje trójkąt, w którym proste połowiące dwa z jego kątów są prostopadłe?

6. Obwód prostokąta wynosi 80 cm. Prosta, która dzieli jeden z kątów prostokąta na połowy, dzieli jednocześnie jego obwód na dwie części różniące się o 20 cm. Jakie jest pole prostokąta?

7. Na obozie Jacek i Placek obrali 400 ziemniaków, przy czym pierwszy z nich obierał 3 ziemniaki na minutę, a drugi 2, za to robił to o 25 minut dłużej. Ile czasu każdy z nich obierał ziemniaki?

8. Z kwadratowych kafelków o boku 10 cm budujemy figury takie, jak pokazane na rysunku. Jaki jest obwód 17. z kolei figury?



9. Andrzej powiedział mamie, że za bombonierkę i cztery jednakowe czekolady zapłacił 28 zł. Mama pamięta, że gdy kupowała rano w tym samym sklepie taką samą czekoladę i wręczyła kasjerowi 10 zł, to otrzymała resztę równą $\frac{1}{4}$ ceny bombonierki. Czy Andrzej powiedział prawdę?

10. Samochód z Legnicy do Niemczy wyjechał o 9 rano. Na drodze obowiązuje ograniczenie prędkości do 90 km/h. Kierowca jechał przepisowo, ze średnią prędkością 80 km/h aż do chwili, gdy po przejechaniu 50 km złapał gumę. Wymiana koła zajęła kierowcy 30 minut. Czy zdąży do celu na 10:40, jeśli zostały mu 53 km drogi?