KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

ELIMINACJE SZKOLNE
RACHUNEK LAMBDA – NOTATKI Z WYKŁADU

- -

1) Co to za okazja
2) Co to jest rachunek lambda
3) Jak działa rachunek lambda
4) Identyczność i zamiana liter
5) Definiowanie makrooperacji: TAK, NIE, CZYZERO, PARA, ZŁÓŻ

- -

Ad 1. 70-lecie polskiej informatyki. 23 XII 1948 roku z inicjatywy Kazimierza Kuratowskiego powołano zespół matematyków i inżynierów, którego zadaniem było zbudowanie w naszym kraju maszyny matematycznej – prekursora dzisiejszych komputerów.

Ad. 2. Co to jest rachunek lambda? W 1936 r. nie było jeszcze komputerów. Ale od XVII w. (Leibniz) istniał tzw. problem decyzji (Entscheidungsproblem): czy istnieje algorytmiczna (mechaniczna) procedura rozstrzygająca o prawdziwości twierdzeń logiki I rzędu. Co miałoby składać się na taka procedurę? W tymże roku Alonzo Church i Alan Turing znaleźli niezależnie sposób sformalizowania algorytmu co doprowadziło do rozwiązania problemu decyzji (negatywnego). Jeden posłużył się abstrakcyjnym modelem komputera (tzw. maszyna Turinga), a drugi rachunkiem lambda. Rachunek lambda to najprostszy język programowania. Wszystkie obiekty i operacje definiuje za pomocą jednego symbolu λ.

Ad. 3. Jak działa rachunek λ. W matematyce wykonuje się operacje na liczbach, zmiennych, funkcjach i innych obiektach. Biorą one jakiś argument i zwracają jakąś wartość. Weźmy na przykład operację P := „zwiększ liczbę o 3 i podziel przez 2" lub Q := „pomnóż liczbę przez siebie i dodaj pięć".

$1 \to P \to (1+3):2 = 4:2 = 2$	$5 \to P \to (5+3):2 = 8:2 = 4$	$a \to P \to (a+3):2$	$n+1 \to P \to (n+1+3):2 = (n+4):2$
$1 \to Q \to 1\cdot 1+5 = 6$	$5 \to Q \to 5\cdot 5+5 = 30$	$a \to Q \to a\cdot a+5$	$n+1 \to Q \to (n+1)\cdot(n+1)+5$

To samo zapiszemy teraz, używając symbolu λ, oznaczającego pewną operację.

P	λ	x	.	**$(x + 3) : 2$**	$\lambda x.\ (x+3):2$
	działanie, które bierze	iks	i zwraca	iks plus trzy dzielone na dwa	

Q	λ	x	.	**$x \cdot x + 5$**	$\lambda x.\ x\cdot x + 5$
	działanie, które bierze	iks	i zwraca	iks razy iks plus pięć	

Miejsce, gdzie kończy się przepis na λ i należy wykonać to działanie, oznaczamy przez @, a następnie podajemy argument, na którym trzeba to działanie wykonać.

Przykłady:

$\lambda x.\ (x+3):2$ @ $5 = (5+3):2 = 8:2 = 4$

$\lambda x.\ x+y$ @ $3 = 3+y$

$\lambda x.\ \lambda y.\ x+x+y$ @ 3 @ 4 = $\lambda y.\ 3+3+y$ @ 4 = 3+3+4 = 10

Wnioski:
* Wykonać działanie w miejscu @, to znaczy przepisać zwracane wyrażenie, zamieniając w nim za każdym razem literę stojącą przy λ na to, co zostało dane jako argument po znaku @.
* Działania upraszczamy zawsze do końca, tak długo jak się da.

Wyniki, które nie zawierają zapisów $\lambda x.$ … @, ani żadnych niewykonanych działań, tzn. takie, których nie da się już uprościć nazywamy **postacią normalną**.

Działania mogą być wykonywane nie tylko na liczbach jako argumentach, ale także na innych działaniach. Wynikami działań także mogą być działania.

Przykłady. Zapisz w postaci normalnej.

$\lambda x.\ x$ @ $x = x$

$\lambda x.\ (x$ @ $x)$ @ $\lambda y.\ y = \lambda y.\ y$ @ $\lambda y.\ y = \lambda y.\ y$

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

Jeśli jest więcej działań @, podstawienia wykonujemy w kolejności od lewej do prawej, chyba że inną kolejność narzucają nawiasy.

Przykłady. Zapisz w postaci normalnej.

λx. λz. x @ λx. x @ λx. λy. y = λz. λx. x @ λx. λy. y = λx. x

λx. λz. x @ λx. x @ λx. λy. y @ 6= λx. x @ 6 = 6

λx. λy. (*y* @ *x*) @ 3 @ *λx. x* + 4 = *λy.* (*y* @ 3) @ *λx. x* + 4 = *λx. x* + 4 @ 3 = 3+4 = 7

λx. λy. λz. z @ x @ y = λy. λz. z @ y = λz. Z

λn. λm. n-m @ 6 @ 1 = *λm.* 6-*m* @ 1 = 6-1 = 5

Ad 4. Identyczność i kolizja liter. Zapis ***λx. x*** nazywamy **identycznością**. Zawsze zwraca to samo, co pobiera. *λx. x* @ 5 = 5,   *λx. x* @ x = x,   *λx. x* @ *λx. λy. y* = *λx. λy. y* itd. Identyczność jest jedna, bez względu użyte litery, tzn. *λx. x* = *λy. y* = *λz. z* = … Podobnie możemy zapisać operację *f* wzorem $f(x) = x^2+3$ lub $f(y) = y^2+3$, a to jest ta sama operacja.

Czasem może się zdarzyć taka sytuacja: *λx. λy. x* @ *λy. y* @ 5 = *λy. λy. y* @ 5 = ??? Co dalej? Napis *λ*5. 5 nie ma sensu. Trzeba dokonać zamiany kolidujących liter, bo przecież *λy. λy. y* to jest to samo, co *λy. λz. z.* Mamy zatem *λy. λy. y* @ 5 = *λy. λz. z* @ 5 = *λz. z*.

Ad 5. Definiowanie makrooperacji. Wiemy już wszystko, co jest potrzebne, aby posługiwać się rachunkiem lambda. Teraz możemy definiować bardziej złożone mikrooperacje (jak w geometrii z podstawowych konstrukcji definiujemy makrokonstrukcje). Poznamy trzy takie mikrooperacje, ale w podobny sposób można zdefiniować liczby, działania na nich, działania logiczne i całą matematykę.

TAK i NIE

Niech **tak :=** *λx. λy. x* zaś **nie :=** *λx. λy. y*. Te działania pozwalają wybrać jedną z dwóch opcji, bowiem:

tak @ *A* @ *B* = *λx. λy. x* @ *A* @ *B* = *λy. A* @ *B* = *A*

nie @ *A* @ *B* = *λx. λy. y* @ *A* @ *B* = *λy. y* @ *B* = *B*

Przykład:

tak @ nie @ tak @ nie @ tak = *λx. λy. x* @ nie @ tak @ nie @ tak = *λy.* nie @ tak @ nie @ tak =
I sposób: = *λy. λx. λy. y* @ tak @ nie @ tak = **zamiana liter** = *λy. λx. λz. z* @ tak @ nie @ tak = *λx. λz. z* @ nie @ tak = nie @ nie @ tak = **tak**
II sposób: = **zamiana liter w definicji nie** = nie @ nie @ tak = **tak**

Ile to jest (tak @ 7 @ 3) + (nie @ 4 @ 2)? = 7 + 2 = 9

CZYZERO

Można zdefiniować operację **czyZero** ,która sprawdza, czy dana liczba jest zerem. Ma ona następujące własności:
czyZero @ 0 = tak   oraz   czyZero @ *n* = nie, gdy *n* jest liczbą różną od zera

Przykłady. Oblicz

czyZero @ ((tak @ 3 @ 4)−3) @ 8 @ 2 =
= czyZero @ (3−3) @ 8 @ 2 = czyZero @ 0 @ 8 @ 2 = tak @ 8 @ 2 = 8

czyZero @ ((czyZero @ 8) @ 3 @ 0) @ 7 @ 5 =
= czyZero @ (nie @ 3 @ 0) @ 7 @ 5 = czyZero @ 0 @ 7 @ 5 = = tak @ 7 @ 5 = 7

PARA

Zdefiniujemy operację, które zapamięta dwa elementy i pozwoli wydostać każdy z nich: **para :=** *λx. λy. λz.* (*z* @ *x* @ *y*)

Przykład. Przetestuj, jak to działa.

para @ *A* @ *B* @ tak = *λx. λy. λz.* (*z* @ *x* @ *y*) @ *A* @ *B* @ tak = *λy. λz.* (*z* @ *A* @ *y*) @ *B* @ tak =
= *λz.* (*z* @ *A* @ *B*) @ tak = tak @ *A* @ *B* = *A*

para @ *A* @ *B* @ nie = *λx. λy. λz.* (*z* @ *x* @ *y*) @ *A* @ *B* @ nie = *λy. λz.* (*z* @ *A* @ *y*) @ *B* @ nie =
= *λz.* (*z* @ *A* @ *B*) @ nie = nie @ *A* @ *B* = *B*

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

Oblicz: para @ 3 @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak = ???

I sposób: = $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (z @ x @ y)$ @ 3 @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak =
= $\lambda y.\ \lambda z.\ (z @ 3 @ y)$ @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak = $\lambda z.$ (z @ 3 @ (para @ 5 @ 7)) @ nie @ tak =
= (nie @ 3 @ (para @ 5 @ 7)) @ tak = (para @ 5 @ 7) @ tak = para @ 5 @ 7 @ tak =
= $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (z @ x @ y)$ @ 5 @ 7 @ tak = $\lambda y.\ \lambda z.\ (z @ 5 @ y)$ @ 7 @ tak = $\lambda z.\ (z @ 5 @ 7)$ @ tak =
= tak @ 5 @ 7 = 5

II sposób: para @ 3 @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak = (para @ 5 @ 7) @ tak = para @ 5 @ 7 @ tak = 5

ZŁÓŻ

Możemy myśleć o operacjach złożonych z innych operacji tak, że wynik jednego działania trafia od razu do drugiego, a także o samej operacji składania:

$a \to P \to Q \to ((a+3):2)\cdot((a+3):2)+5$

złóż := $\lambda g.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (g @ (f @ x))$

Przykład. Sprawdźmy, że podana definicja faktycznie składa działania.

złóż @ $\lambda x.\ 2\cdot x$ @ $\lambda x.\ x+10$ @ 3 = **zamiana liter** = $\lambda g.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (g @ (f @ x))$ @ $\lambda y.\ 2\cdot y$ @ $\lambda z.\ z+10$ @ 3 =
= $\lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda y.\ 2\cdot y @ (f @ x))$ @ $\lambda z.\ z+10$ @ 3 = $\lambda x.\ (\lambda y.\ 2\cdot y @ (\lambda z.\ z+10 @ x))$ @ 3 = $\lambda y.\ 2\cdot y @ (\lambda z.\ z+10 @ 3)$ =
= $\lambda y.\ 2\cdot y$ @ 3+10 = = $\lambda y.\ 2\cdot y$ @ 13 = $2\cdot 13 = 26$

złóż @ $\lambda x.\ x+3$ @ $\lambda x.\ x+4$ = **zamiana liter** = $\lambda g.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (g @ (f @ x))$ @ $\lambda y.\ y+3$ @ $\lambda z.\ z+4$ =
= = $\lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda y.\ y+3 @ (f @ x))$ @ $\lambda z.\ z+4$ = $\lambda x.\ (\lambda y.\ y+3 @ (\lambda z.\ z+4 @ x))$ = $\lambda x.\ (\lambda y.\ y+3 @ x+4)$ = $\lambda x.\ x+4+3$ = $\lambda x.\ x+7$

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

UWAGI ORGANIZCYJNE

1. **Czas trwania** wykładu 45 min. Czas pisania zadań 45 min. Nie trzeba powiedzieć wszystkiego. Nie trzeba rozwiązać wszystkiego. Na ogół do wejścia do finału wystarczy mieć ponad 50% (w klasach młodszych pewnie mniej), więc lepiej mniej, a dobrze.
2. **Terminy** konkursu szkolnego
   SP 4-6: 19 XI – część zadaniowa, 23 XI – odsył wyników, 1 XII – finał
   SP 7-8 i GM 3: 26 XI – część zadaniowa, 30 XI – odsył wyników, 8 XII – finał
   LO: 3 XII – część zadaniowa, 7 XII – odsył wyników, 15 XII – finał
3. Wykład można zrobić w dniu eliminacji szkolnych lub w piątek poprzedzający dzień eliminacji.
4. W SP wykład dla Młodzików i Juniorów warto zrobić osobno. W przeciwnym razie stracą na tym jedni i drudzy.
5. Wyniki proszę przesłać w pliku xls bez żadnych dodatkowych formatowań (wzór do pobrania ze strony konkursu).
6. W przypadku dużej liczby uczniów i dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich nazwisk, ale należy podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej.
7. Prac nie trzeba przesyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyleń wyników z danej szkoły od średniej, możemy poprosić o przesłanie prac.
8. Każdy podpunkt jest oceniany zero-jedynkowo.
9. Finały we wszystkich kategoriach odbywają się w Instytucie Matematycznym UWr, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław (dojazd z dworca PKP i PKS autobusami 145 i 146 w kierunku Sępolna i Biskupina, należy wysiąść na przystanku Most Grunwaldzki), początek o godz. 10:15 w sali HS. Przebieg finału opisano na stronie WWW konkursu.

KLUCZ ODPOWIEDZI

1. Alonzo Church
2. 1936 r. (pierwsza opublikowana praca)
3. a) 42 b) 12 c) 5 d) 18 e) 2 f) 21 g) 19 h) 81 i) 25 j) 81 k) 4
4. a) nie (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienione litery), b) $\lambda x.\ x$ (lub zmienione litery, lub identyczność)
   c) nie (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienione litery), d) nie (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienione litery)
   e) $\lambda y.\ \lambda x.\ x$ (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienić litery, lub nie), f) 195, g) 3
5. a) 45 b) 82 c) 48 d) 1 e) 3
6. a) lewa b) prawa c) prawa d) środkowa e) lewa
7. a) 23, b) $\lambda x.\ 3\cdot x+11$ (lub zmienić litery, lub $\lambda x.\ 11+3\cdot x$ itp.),
   c) $\lambda x.\ 8\cdot x+5$ (lub zmienić litery, lub $\lambda x.\ x\cdot 8+5$ itp.), d) $\lambda x.\ x$ (lub zmienione litery, lub identyczność)

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

ELIMINACJE SZKOLNE: JUNIORZY (SP 7-8 i GM 3) szkoła: ....

imię i nazwisko:.. klasa: ....

Zad. 1. Kto wymyślił rachunek lambda?

....

Zad. 2. W którym roku?

....

Zad. 3. Napisz postać normalną wyrażeń.

a) $\lambda x.\ x$ @ 42

....

b) $\lambda y.\ y+1$ @ 11

....

c) $\lambda n.\ \lambda m.\ n+m$ @ 2 @ 3

....

d) $\lambda n.\ \lambda m.\ n+m+m$ @ 8 @ 5

....

e) $\lambda n.\ \lambda m.\ m-n$ @ 4 @ 6

....

f) $\lambda n.\ \lambda m.\ \lambda k.\ (m+n)\cdot(n-k)$ @ 4 @ 3 @ 1

....

g) $\lambda n.\ \lambda m.\ n\cdot m+n+m$ @ 3 @ 4

....

h) λn. λm. (m+2)·(n+1) @ 8 @ 7

....

i) $\lambda f.\ (f$ @ 3) + (f @ 4) @ $\lambda n.\ n\cdot n$

....

j) $\lambda f.\ (f$ @ (f @ 3)) @ $\lambda n.\ n\cdot n$

....

k) $\lambda f.\ (f$ @ (f @ 3 @ 7) @ 3)) @ $\lambda n.\ \lambda m.\ (n+m):2$

....

Zad. 4. Uprość zapisy.

a) $\lambda x.\ x$ @ nie

....

b) $\lambda x.\ x$ @ $\lambda y.\ y$ @ $\lambda z.\ z$ @ $\lambda x.\ x$

....

c) tak @ tak @ tak @ nie @ tak

....

d) nie @ nie @ nie @ tak @ nie

....

e) tak @ $\lambda x.\ x$

....

f) tak @ nie @ tak @ (12·14) @ (13·15)

....

g) tak @ 3 @ (24·13)

....

Zad. 5. Oblicz wyniki działań.

a) czyZero @ 0 @ 45 @ 76

....

b) (tak @ 23 @ 68) + (para @ 59 @ 31 @ tak)

....

c) (tak @ 8 @ 9)·(nie @ 7 @ 6)

....

d) para @ 2 @ 1 @ (czyZero @ 4)

....

e) czyZero @ ((czyZero @ 1) @ 1 @ 0) @ 3 @ 2

....

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

Zad. 6. Podkreśl jedną z definicji, która spełnia podaną własność.

a) pierwszy @ (para @ *A* @ *B*) = *A*

pierwszy := $\lambda p.$ (p @ tak) $\lambda p.$ (p @ nie) $\lambda p.$ (nie @ p)

b) czyJeden @ 1 = tak oraz czyJeden @ 2 = nie

czyJeden := $\lambda n.$ (czyZero @ n+1) $\lambda n.$ (czyZero @ n @ 1 @ 0) $\lambda n.$ (czyZero @ n-1)

c) zamień @ (para @ *A* @ *B*) = para @ *B* @ *A*

zamień := $\lambda p.$ (nie @ tak @ p) $\lambda p.$ (para @ (p @ tak) @ (p @ nie)) $\lambda p.$ (para @ (p@nie) @ (p@tak))

d) zaprzecz @ tak = nie oraz zaprzecz @ nie = tak

zaprzecz := $\lambda b.$ (b @ tak @ nie) $\lambda b.$ (b @ nie @ tak) $\lambda b.$ (para @ tak @ nie @ b)

e) lub @ nie @ nie = nie oraz lub @ tak @ tak = lub @ tak @ nie = lub @ nie @ tak = tak

lub := $\lambda a.\ \lambda b.$ (a@tak@b) $\lambda a.\ \lambda b.$ (a @ (b@tak@tak) @ (b@nie@tak)) $\lambda a.\ \lambda b.$ (a@b@tak)

Zad. 7. Oblicz postać normalną.

a) złóż @ $\lambda x.\ 2\cdot x+9$ @ $\lambda x.\ 3\cdot x+1$ @ 2

……………………………………………………………………………………..

b) złóż @ $\lambda x.\ x+4$ @ $\lambda x.\ 3\cdot x+7$

……………………………………………………………………………………..

c) złóż @ $\lambda x.\ 2\cdot x+3$ @ $\lambda x.\ 4\cdot x+1$

……………………………………………………………………………………..

d) złóż @ $\lambda x.\ x$ @ $\lambda x.\ x$

……………………………………………………………………………………..