DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XII – ROK SZKOLNY 2012/13

SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

1. Połowa liczby przeciwnej do kwadratu odwrotności liczby, którą pomyślał Stach, jest równa (-1/18). Jaką liczbę pomyślał?

2. Odległość Ziemia - Słońce wynosi 150 milionów km. Prędkość światła to 300 000 km/s. Światło dociera ze Słońca na Ziemię w ciągu 8 minut. Gdyby Słońce wzeszło dziś o 6 i w tej samej chwili prędkość światła w jakiś niewytłumaczalny sposób wzrosłaby dwukrotnie, to o której godzinie Słońce wzejdzie jutro?

3. Ile maksymalnie liczb pierwszych można znaleźć wśród 10 kolejnych liczb naturalnych?

4. Czy istnieje liczba naturalna, której kwadrat ma w zapisie dziesiętnym 45 cyfr i każda z cyfr $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ występuje w nim dokładnie k razy?

5. Ile końcowych zer ma liczba 2012!?

6. Oblicz pole "soczewki" będącej częścią wspólną dwóch kół o promieniu 1, których środki są odległe o 1.

7. W prostopadłościanie $3 \times 4 \times 5$ połączono każdy wierzchołek ze środkiem każdej ściany, do której nie należy. Ile jakiej długości odcinków otrzymano?

8. W jakim stosunku dzieli najdłuższy bok trójkąta o bokach 5, 6, 7 opuszczona nań wysokość?

9. Wyznacz wszystkie miary kąta $\alpha \in (0°, 45°)$, dla których prawdziwa jest równość $\cos\alpha \cdot \cos2\alpha \cdot \cos4\alpha = 1/8$.

10. Indiana Jones zamierza maszerować 6 dni przez pustynie. On i jego tragarze mogą wziąć na raz tylko tyle wody i żywności każdy, ile wystarcza dla jednej osoby na cztery dni. Ilu najmniej tragarzy musi wynająć Indiana, aby przeprawić się przez pustynię bez strat w ludziach?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XII – ROK SZKOLNY 2012/13

SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

1. Trójkąt równoramienny ma ramię 12 cm i kąt przy podstawie 30°. Jakie są długości wszystkich jego wysokości?

2. Majowie budują jedną ze swoich słynnych piramid schodkowych z sześciennych kamiennych bloków. Piramida będzie się składać ze 111 stopni o wysokości i głębokości 1 kamienia. Górny poziom budowli będzie miał rozmiary 10×10 bloków. Ilu kamiennych bloków potrzeba do zbudowania tej piramidy?

3. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby n, n^5 i n^{13} mają jednakowe cyfry jedności.

4. Rzucamy 12 kostkami do gry. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że każda ścianka wypadła dokładnie dwa razy?

5. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których n^2+315 jest kwadratem liczby całkowitej.

6. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, H – punktem przecięcia jego wysokości, H_C - punktem symetrycznym do H względem AB, H_B - punktem symetrycznym do H względem AC, a H_A - punktem symetrycznym do H względem BC. Udowodnij, że H_A, H_B i H_C leżą na okręgu przechodzącym przez A, B i C.

7. W ciągu arytmetycznym o nieparzystej liczbie całkowitych wyrazów suma liczb z miejsc nieparzystych wynosi 44, a pozostałych 33. Ile wyrazów ma ten ciąg?

8. Uzasadnij, że suma odległości dowolnego punktu płaszczyzny od wierzchołków dowolnego czworokąta jest nie mniejsza niż suma długości jego przekątnych.

9. Czy $\cos 100° < \cos 2012°$?

10. Uczniowie Gimnazjum w Koziegłowach zauważyli, że ich szkolny gimbus spóźnia się, gdy kierowcą jest pan Janek z prawdopodobieństwem 5%, gdy pan Kazik – 20%, a gdy pan Jureczek – aż 50%. Pan Janek jeździ zawsze w poniedziałki i środy, pan Kazik we wtorki i czwartki, a pan Jureczek w piątki i w weekendy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że autokar spóźni się w ciągu tygodnia nauki szkolnej?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XII – ROK SZKOLNY 2012/13

SZKOŁY PONADGIMNAZJALNE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1. Zapisujemy liczbę o bardzo długim rozwinięciu dziesiętnym. Występują w nim po kolei wszystkie liczby naturalne: 0,12345678910111213141 5.... Jaka cyfra jest na 1111 miejscu po przecinku?

2. Z 18 jednakowych sześcianów zbudowano prostopadłościan o wysokości trzech sześcianów. Pole powierzchni jednego sześcianu jest równe 19 cm^2. Jakie jest pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu?

3. Liczbyx_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)= ax^2+bx+c$. Jakie znaki maja współczynniki a, b, c, gdy oba pierwiastki i wartość funkcji f w zerze są dodatnie?

4. Czy pierwiastki kwadratowe z trzech kolejnych liczb pierwszych mogą tworzyć ciąg geometryczny?

5. Rzucamy 4 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma kwadratów otrzymanych wyników jest podzielna przez 3?

6. Czy prawdziwa jest następująca cecha podzielności przez 3: liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy suma sześcianów jej cyfr jest podzielna przez 3?

7. *AB* jest średnicą jednostkowego koła o środku *S*. Jakie pole ma figura utworzona z punktów *C* tego koła, dla których *CBS* jest trójkątem rozwartokątnym?

8. Janka była 4 lata temu 4 razy młodsza od mamy, a 10 lat temu była 10 razy młodsza od mamy. Za ile lat wiek Julki i mamy będą wzajemnymi palindromami?

9. Ile jest liczb całkowitych dodatnich niepodzielnych przez 10, których kwadrat ma w zapisie dziesiętnym sumę cyfr równą 13?

10. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z jeśli $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2 \geq 1/3$.