KONKURS MATEMATYCZNY – KOMA 2014
GIMNAZJA, LICEA – ELIMINACJE SZKOLNE
MACIERZE – KONSPEKT WYKŁADU

- -

1) Definicja i terminologia (macierz, wiersz, kolumna, element, rozmiar, macierz kwadratowa, zerowa, jednostkowa, kolumnowa, przekątna główna, antyprzekątna, macierze równe)
2) Przykłady zastosowań
3) Działania i ich własności (dodawanie, mnożenie przez liczbę, mnożenie)
4) Wyznacznik, macierz odwrotna
5) Zastosowania macierzy w działaniach

- -

Ad 1. Uczymy się działań na liczbach i wykorzystujemy to w różnych celach. Podobnie uczymy się działań na całych tablicach liczb i to tez znajduje liczne zastosowania, zwłaszcza w dobie komputerów. **Macierz** (matrix) to właśnie prostokątna tablica liczbowa. Wypełniają ją elementy ustawione w wiersze i kolumny. Liczba wierszy i kolumn (w tej kolejności) określa **rozmiar macierzy**. Przykłady:

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -9 & 1/2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ rozmiar 3×2 (notacja $A_{3\times2}$) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ rozmiar 2×3 $\begin{bmatrix} 9 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ macierz kolumnowa $\begin{bmatrix} 8 & -16 & 2{,}1 \end{bmatrix}$ macierz wierszowa

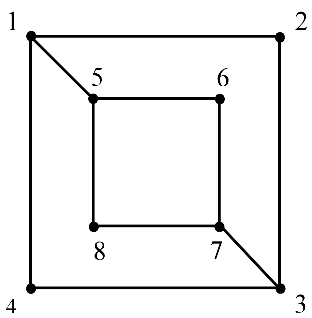
Macierz kolumnowa – zastosowanie do zapisu wektorów, wierszowa – do zapisu współrzędnych punktów.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ macierz zerowa $O_{3\times2}$... $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ macierz kwadratowa rozmiar $n\times n$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierz jednostkowa $I_{3\times3}$

W macierzy jednostkowej jedynki na głównej przekątnej. Macierze równe mają ten sam rozmiar i te same elementy na odpowiednich pozycjach (a_{ij}). Wskazywanie elementów, określanie rozmiarów - ćwiczenia.

Ad 2. Macierze wprowadził brytyjski matematyk Arthur Cayley w 1857 roku, badając przekształcenia liniowe, czyli zamiast $\begin{matrix} x_1 = ax + by \\ y_1 = cx + dy \end{matrix}$ stosował zapis $\begin{bmatrix} a & b \\ d & d \end{bmatrix}$. Podobny skrócony zapis stosujemy przy rozwiązywaniu układów równań.

Macierze kodują grafy (m. sąsiedztwa) i sieci (m. komunikacji), relacje, przepływy, wyniki rozgrywek (m. dominacji) itp.



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	1	0
4	1	0	1	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0	1	0
7	0	0	1	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	1	0	1	0

Powyżej odczytamy rzędy wierzchołków, poniżej liczby zwycięstw i porażek.

Z/DO	miasto	wieś	okręg prz.
miasto	65%	31%	4%
wieś	18%	70%	12%
okręg prz.	17%	8%	75%

Asy	0	1	1	0
Byki	0	0	1	1
Cobry	0	0	0	1
Dziki	1	0	0	0

Ad 3. Dodajemy macierze tych samych rozmiarów ($A_{m\times n}$+$B_{m\times n}$), dodając wyrazy stojące na tych samych pozycjach. Dodawanie macierzy różnych rozmiarów jest niewykonalne. Łatwo sprawdzić, że podobnie jak dla liczb, dodawanie macierzy jest przemienne i łączne, a dodanie macierzy zerowej (dobrego rozmiaru) nie zmienia wyniku. Macierze przeciwne sumują się do macierzy zerowej. Ich elementy są liczbami przeciwnymi. Odejmowanie macierzy to dodawanie macierzy przeciwnej.

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Macierz można **pomnożyć przez liczbę**. Wynikiem jest macierz tego samego rozmiaru, której wszystkie elementy są pomnożone przez tę liczbę. Mnożenie przez liczbę jest przemienne, tzn. $2\cdot A=A\cdot 2$ i łączne, tzn. $2\cdot 3\cdot A = 6\cdot A = 2\cdot(3A)$. Wynikiem mnożenia macierzy przez liczbę 0 jest macierz zerowa tego samego rozmiaru. Wynikiem mnożenia macierzy zerowej przez dowolną liczbę jest ta sama macierz zerowa.

$2\cdot A = 2\cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 0 & 10 & -2 \end{bmatrix}$

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2014

Macierz można **pomnożyć przez macierz** rozmiaru wewnętrznie zgodnego, tzn. macierz $m\times n$ przez macierz $n\times p$ Wynikiem mnożenia jest macierz $m\times p$. Można w szczególności mnożyć macierze kwadratowe, a wynik ma ten sam rozmiar. Jak widać mnożenie macierzy nie jest przemienne (nawet w przypadkach, gdy jest wykonalne co różni je od liczb). Mnożenie macierzy polega na mnożeniu wiersza *i* pierwszej macierzy przez kolumnę *j* drugiej macierzy (kolejne elementy mnożymy, a iloczyny dodajemy) i wpisaniu wyniku jako elementu a_{ij} w macierzy stanowiącej iloczyn. Mnożenie (lewostronne lub prawostronne) przez macierz jednostkową (jedynki na głównej przekątnej, reszta zera) dobrego rozmiaru (tzn. jakiego?) nie zmienia wyniku. Macierz kwadratową (i tylko taką) można mnożyć przez siebie, otrzymując jej kolejne potęgi. Kolejna różnica z mnożeniem liczb jest taka, że istnieją niezerowe dzielniki zera, tzn. dla niezerowych *A* i *B* może być $A\cdot B=0$. Ale nadal mnożenie jest łączne i rozdzielne względem dodawania. Pytanie, czy dla mnożenia macierzy zachodzą wzory skróconego mnożenia, np. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ lub $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ – pozostawiamy bez odpowiedzi (NIE).

np. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dalsze przykłady (pomnożyć prostokątną przez jednostkową, obliczyć kwadrat kwadratowej itp.)

Ponieważ własności działań na macierzach są (z grubsza) takie, jak na liczbach, możemy tak samo jak dla liczb rozwiązywać równania liniowe (dodawać stronami macierz przeciwną, mnożyć lewo- lub prawostronnie przez macierz odwrotną), aby wyliczyć macierz niewiadomą.

np. $3X+2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{2}X\cdot\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Ad 4. Wyznacznik (ang. determinant) [macierzy] (nie mylić z wyróżnikiem [trójmianu kwadratowego]) obliczamy tylko dla macierzy kwadratowych. Jest to liczba. Dla macierzy $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, det*A* (ozn. też $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$) = *ad–bc* (różnica iloczynów krzyżowych).

Dla macierzy $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, $\det B = a\cdot\det A-d\cdot\det D+g\cdot\det G$ (*A*, *D*, *G* – minory odpowiednich elementów). Dla większych rozmiarów analogicznie. Można pokazać metodę Sarrusa dla wyznaczników 3×3, ale nie jest tu potrzebna.

Własności wyznaczników (można je sprawdzić przy okazji obliczania wyznaczników rozmiaru 2 lub 3). Jeśli wiersz lub kolumna są zerami, to wyznacznik jest zerem. Jeśli przestawimy dwa wiersze lub kolumny, wyznacznik zmieni znak. Jeśli dwa wiersze/kolumny są jednakowe, to wyznacznik jest 0. Jeśli wiersz/kolumnę pomnożymy przez liczbę *a*, wyznacznik wzrośnie *a* razy. Jeśli każdy element pomnożymy przez liczbę *a*, wyznacznik wzrośnie a^2 razy.

Macierz odwrotna A^{-1} ma tę własność, że $A\cdot A^{-1}=I$. Czy każda niezerowa macierz kwadratowa ma odwrotną? Nie, tylko z niezerowym wyznacznikiem. Sprawdzenie dla rozmiaru 2×2: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+bt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Rozwiązujemy układ równań i wychodzi: $x=\frac{d}{ad-bc}$ $y=\frac{-b}{ad-bc}$.

$z=\frac{-c}{ad-bc}$ $t=\frac{a}{ad-bc}$

Zatem $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (zamieniamy elementy na głównej przekątnej, a na antyprzekątnej zmieniamy znaki). Dla wyższych rozmiarów postępujemy analogicznie, tylko rachunki są dłuższe i wynik bardziej skomplikowany.

Możemy rozwiązywać dalsze równania macierzowe: $A\cdot X=B$, mnożąc obie strony (lewostronnie) przez A^{-1}. Otrzymamy $X=A^{-1}B$.

Ad 5. Zastosowanie macierzy i działań na nich – przykłady.

1) Mnożenie macierzy przekształcenia liniowego przez macierz wektora wodzącego punktu daje obraz punktu w tym przekształceniu. Wyznacznik wskazuje skalę przekształcenia (np. jednokładności, powinowactwa, symetrii) a znak wskazuje na zmianę orientacji. Zatem przekształcenie liniowe płaszczyzny $\begin{matrix} x_1=ax+by \\ y_1=cx+dy \end{matrix}$ zapisujemy jako $\begin{bmatrix} a & b \\ d & d \end{bmatrix}$.i wyliczamy obraz punktu (x, y) jako $\begin{bmatrix} a & b \\ d & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

2) Mnożenie macierzy cen i sprzedaży, aby uzyskać macierz przychodów.

Macierz cen $C=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix}$. Macierz sprzedaży towarów w dwóch kolejnych miesiącach $S = \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T \end{array}\begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 7 \\ 12 & 20 \\ 20 & 32 \end{bmatrix}$. $C\cdot S$ to macierz przychodów uzyskanych w kolejnych miesiącach.

3) Mnożenie macierzy sąsiedztwa przez siebie podaje liczby dróg ustalonej długości między wierzchołkami grafu, tzn. A^2 podaje liczby dróg długości 2 między wierzchołkami, a $A+A^2$ liczby dróg długości co najmniej 2.

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2014

Macierz komunikacji dla sieci połączeń drogą radiową między statkami o macierzy *A*=$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Suma wiersza wskazuje do kogo można wysłać wiadomość, a suma kolumny od kogo można ją otrzymać.

4) Mnożenie macierzy dominacji przez siebie : dominacje pośrednie II rzędu.

Dla macierzy dominacji podanej wcześniej A^2 = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (Asy wygrały z Dzikami za pośrednictwem Byków i Cobr).

$A+A^2$ = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (dominacje bezpośrednie lub pośrednie), Największa suma wiersza wskazuje zwycięzcę turnieju.

5) Mnożenie macierzy stanu przez macierz przewidywanego przepływu daje przewidywane stany po przepływie.

Stan zamieszkania miast/wsi/okręgów przemysłowych w mln Z = $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 \end{bmatrix}$. Po pomnożeniu przez macierz przepływów podaną wcześniej otrzymujemy przewidywalne zaludnienie po przepływach Z_1 = $\begin{bmatrix} 9{,}13 & 9{,}26 & 6{,}61 \end{bmatrix}$.

6) Rozwiązywanie układów równań liniowych. Wzory Cramera (Gabriel Cramer – szwajcarski matematyk z XVIII w).

Układ równań $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ -x+2y-2z=1 \\ 2x-y+3x=-1 \end{cases}$ można rozwiązać przez wykonanie mnożenia $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, albo stosując gotowe wzory: x=$\frac{D_x}{D}$, y=$\frac{D_y}{D}$, z=$\frac{D_z}{D}$, gdzie *D*=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ - wyznacznik główny układu, D_x = $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ - wyznacznik względem *x* (kolumna współczynników przy *x* jest zastąpiona kolumną wyrazów wolnych), D_y, D_z – analogicznie.

UWAGI

1. Czas trwania wykładu z pokazem: 60-90 min. Czas pisania zadań 45 min.
2. Nie można używać kalkulatorów, bo tylko niektóre mają obsługę macierzy.
3. Termin konkursu szkolnego: GM 20 XI, LO 2 XII. Termin odesłania wyników: GM 29 XI, LO 6 XII. Finał: GM 13 XII, LO 20 XII (sobota) godz. 10:15, sala HS Instytutu Matematycznego UWr (pl. Grunwaldzki 2/4, tel. na portiernię 71 3757414).
4. Wyniki w pliku .xls pisane minuskułą. Trzy kolumny: imię/nazwisko/wynik. Nazwa szkoły w nagłówku.
5. W przypadku dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich, ale należy podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej.
6. Każdy podpunkt oceniamy zero-jedynkowo (4 pkt za każde zadanie).

KLUCZ

Zad. 1. 2×4, 1×5, 3×1, 1×1

Zad. 2. 3, 2, 0, nie ma

Zad. 3. $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zad. 4. (-2, 3, -5), (5, -3), ∅, (3, -4, -4)

Zad. 5. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 7 & 11 & -8 \end{bmatrix}$, brak, brak, $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 10 \\ -4 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

Zad. 6. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, brak, brak

Zad. 7. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5/4 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Zad. 8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Zad. 9. (0,0,0), (0, 0, 4), (2, 0, 2), (2, -4, 6)

Zad. 10. 3×2, żadna, 2×1, żadna

Zad. 11. $\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Zad. 12. 5, -8, 1, 137

Zad. 13. $\begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$, brak, brak, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zad. 14. $\begin{bmatrix} 34 & -2 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$, brak, $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Zad. 15. -11, -22, -5, {(2, -5, 4)}

Zad. 16. mają te same rozmiary i równe odpowiednie elementy (2p), kwadratowej o niezerowym wyznaczniku (2 p)

Zad. 17. *BCD*, *A*, *AD*, *D*

Zad. 18. Macierz cen $C = \begin{bmatrix} 30 & 32 & 25 \end{bmatrix}$ (1 p)

Macierz sprzedaży $S = \begin{bmatrix} 60 & 45 \\ 50 & 40 \\ 20 & 55 \end{bmatrix}$ (1 p)

Macierz zysków $Z=C\cdot S$ = [3900   4005] (1 p)

Sprzedaż IV – 3900 zł, sprz. V - 4005 zł (1 p)

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2014

ELIMINACJE SZKOLNE **SZKOŁA ....**

Imię i nazwisko: .... klasa: ....

Zad. 1. Podaj rozmiary macierzy.

a) $\begin{bmatrix} -4 & 5 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ....

b) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ....

c) $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ....

d) $\begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 2. Podaj elementy macierzy $\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) a_{12} ....

b) a_{23} ....

c) a_{33} ....

d) a_{42} ....

Zad. 3. Podaj przykład macierzy.

a) $A_{1\times 3}$ ....

b) $B_{2\times 1}$ ....

c) $O_{2\times 3}$ ....

d) $I_{2\times 2}$ ....

Zad. 4. Znajdź niewiadome.

a) $\begin{bmatrix} 2x & 4 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & y+1 \\ z & 8 \end{bmatrix}$ ....

b) $\begin{bmatrix} x+y & 1 \\ 0 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ....

c) $\begin{bmatrix} x-3 & 2 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & y \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ....

d) $\begin{bmatrix} 8-y & 0 \\ x+2z & x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3y & 0 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 5. Wykonaj działania.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ ....

b) $3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & -12 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$ ....

c) $O_{3\times 2} - 5\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ ....

d) $O_{2\times 3} + 2\begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 6. Pomnóż macierze.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ....

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ....

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ ....

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 7. Rozwiąż równanie macierzowe.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}X = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ ....

b) $2X + 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ....

c) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -13 & -1 \end{bmatrix}$ ....

d) $2X - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 7 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -6 & -8 \\ -23 & 7 & 11 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 8. Oblicz potęgi macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) zerową ....

b) pierwszą ....

c) drugą ....

d) trzecią ....

Zad. 9. Znajdź obrazy podanych punktów przestrzeni w przekształceniu o macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

a) (0, 0, 0) ....

b) (0, 0, 2) ....

c) (1, 0, 1) ....

d) (1, 2, 3) ....

Zad. 10. Macierz jakiego rozmiaru powstanie w wyniku mnożenia?

a) $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ ....

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ....

c) $\cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ....

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 11. Dla macierzy $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **i** $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **oblicz:**

a) $(A+B)\cdot(A-B)$ ....

b) A^2-B^2 ....

c) $(A+B)^2$ ....

d) $A^2+2AB+B^2$ ....

Zad. 12. Oblicz wyznaczniki macierzy

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ ....

b) $\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$ ....

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ....

d) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ ....

Zad. 13. Oblicz macierz odwrotną

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ....

b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ....

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ ....

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 14. Rozwiąż równanie macierzowe

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ....

b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ....

c) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ....

d) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ....

Zad. 15. Dla układu równań $\begin{cases} x-3y-2z=9 \\ 3x+2y+6z=20 \\ 4x-y+3z=25 \end{cases}$ **podaj**

a) wyznacznik główny ....

b) wyznacznik względem *x* ....

c) wartość *y* ....

d) rozwiązanie układu ....

Zad. 16. Uzupełnij zdania.

a) Dwie macierze są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

....

....

b) Macierz odwrotną można obliczyć tylko dla macierzy

....

....

Zad. 17. Dla macierzy komunikacji między punktami triangulacyjnymi *A*, *B*, *C* i *D* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **podaj:**

a) Do jakich punktów można przesłać wiadomość z punktu *A*? ....

b) Z którego punktu można przesłać wiadomość do największej liczby punktów? ....

c) Z których punktów można przesłać wiadomość do punktu B? ....

d) Który punkt może otrzymać wiadomość z największej liczby punktów? ....

Zad. 18. Zapisz rozwiązanie zadania w języku macierzy, oblicz wynik, podaj odpowiedź.

Sklep rowerowy Złoty Pedał w centrum Mediolanu sprzedaje modele Śmigły Rydz w wersji z dziesięcioma, pięcioma i trzema przerzutkami. Zysk z każdego sprzedanego 10-przerzutkowego roweru wynosi 30 euro, z 5-przerzutkowego 32 euro, a z 3-przerzutkowego 25 euro. W kwietniu sklep sprzedał 60 rowerów 10-przerzutkowych, 50 modeli 5-przerzutkowych i 20 z trzema przerzutkami. W maju analogiczne liczby wynosiły 45, 40 i 55. Ile wyniosły zyski ze sprzedaży rowerów w każdym z miesięcy?

....

....

....

....

....

....