DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ I

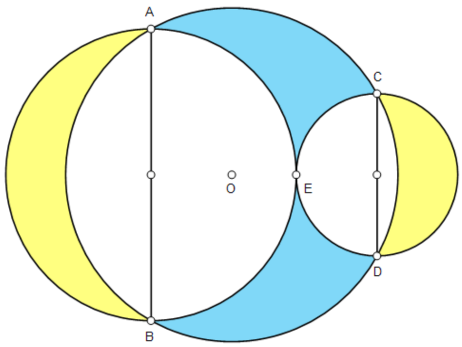
1) Agata ma pudło kartoników z cyframi 1, 2 i 3. Układa z nich liczby wielocyfrowe w taki sposób, aby wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone z kolejnych cyfr tej liczby wielocyfrowej były różne. Ile cyfr ma największa liczba, którą może ułożyć Agata?

2) Pewna liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 1, a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 5. Jakie reszty może dawać z dzielenia przez 30?

3) Dla jakich wartości parametru k wykres trójmianu $y=(2k-1)x^2+(7k+2)x-3k$ leży zawsze powyżej wykresu $y=(k+3)x^2+5(k+1)x-4(k+1)$?

4) Którą potęgą czternastu jest $\sqrt{2016}+\sqrt{56}$?

5) Która figura f czy g ma większe pole? f jest sumą dwóch zacieniowanych księżyców, a g jest sumą środkowej zacieniowanej części.



6) Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby n^{113} i n^{217} mają jednakowe cyfry jedności.

7) Sześcian o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt 45°. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

8) Dane są okręgi o środku w punkcie (3, 2) i promieniu $\sqrt{13}$ oraz o środku w punkcie (-2, -1) i promieniu $\sqrt{10}$. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty przecięcia tych okręgów.

9) Adam ma zapięcie rowerowe wymagające 3-cyfrowego kodu. Postanowił wybrać taki, który składa się z trzech różnych cyfr (bez zera) zapisanych w porządku rosnącym. Ile ma możliwości wyboru tego kodu?

10) W 10 ponumerowanych kopertach trzeba rozłożyć w sumie 1000 zł w taki sposób, aby potem bez otwierania kopert móc wypłacić dowolną całkowitą kwotę od 0 do 1000 zł. Jak rozłożyć te pieniądze?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

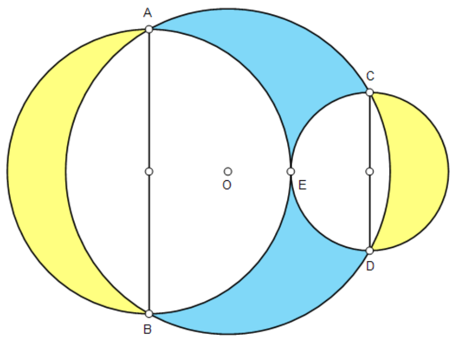
1. Największa możliwa liczba to 3323122113. Ma 10 cyfr. Zaczynamy od 3 i na każdym następnym miejscu wpisujemy największą możliwą cyfrę, która nie powoduje powtórzenia liczy dwucyfrowej, ani nie kończy procedury wypisywania. Dochodzimy do 3323 następną cyfrą nie może być ani 3, ani 2, bo mamy powtórzenie, więc wpisujemy 1. Teraz najwyższą możliwą cyfrą jest 3, ale to urywa procedurę na 332313, bo po 3 wykorzystaliśmy już wszystkie cyfry. Zatem wstawiamy 2, bo to pozwala kontynuować wypisywanie. Podobnie w miejscu 33231221 wpisanie 3 lub 2 zatrzyma procedurę (bo potem nie da się już nic wpisać) natomiast wpisanie 1 pozwoli dopisać jedną cyfrę więcej. Dalej już nic nie można dopisać, bo po każdej cyfrze wystąpiła już każda inna. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia jej maksymalności przyznajemy 5 pkt. Za odpowiedź 9-cyfrową przyznajemy 2 pkt.

2. Reszta jest stale równa 11. Niech $A = 5x+1$ i $A = 6y+5$. Wtedy $6A = 30x+5$ i $5A = 30y+25$. Ale $A = 6A–5A = 30x–30y–19 = 30(x–y)–19 = 30t+11$.

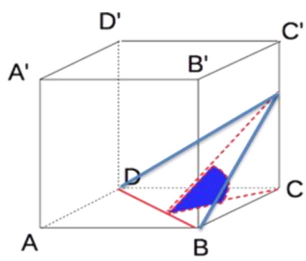
3. Różnica wartości trójmianów dla każdego argumentu x wynosi $(k–4)x^2 +(2k–3)x + k+4$ i ma być stale dodatnia, wobec czego współczynnik przy x^2 musi być dodatni, a wyróżnik – ujemny. Z I warunku otrzymujemy $k>4$, a z II $k>6^1/_{12}$. Warunek zadania jest spełniony dla $k>6^1/_{12}$.

4. $\sqrt{2016}+\sqrt{56}=\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 7}+\sqrt{2^3\cdot 7} = \sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 14}+\sqrt{2^2\cdot 14} = 12\sqrt{14}+2\sqrt{14} = 14\sqrt{14} = \sqrt{14^3} = 14^{3/2}$.

5. Niech x będzie promieniem środkowego okręgu, a S_1 i S_2 oznaczają środki zewnętrznych okręgów. Punkt O leży na prostej S_1S_2 (na symetralnej każdej cięciwy – za założenie tego bez uzasadnienia odejmujemy 2 pkt.). Niech $R=S_1A$ i $r=S_2C$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów OS_1A i OS_2C mamy $x^2=R^2+OS_1^2$ oraz $x^2=r^2+OS_2^2$. Zatem $OS_2^2–OS_1^2 = x^2–r^2 – x^2+R^2 = R^2–r^2 = (R–r)(R+r)$. Zachodzi też $OS_2^2 – OS_1^2 = (OS_2–OS_1)(OS_2+OS_1)$ przy czym $OS_2+OS_1 = R+r$ (warunek zewnętrznej styczności okręgów). Z porównania tych warunków dostajemy $OS_2–OS_1 = R–r$, co przy $OS_2+OS_1 = R+r$ daje $OS_2=R$ i $OS_1 = r$ (czyli $x^2=R^2+r^2$). Za założenie tej równości bez należytego uzasadnienia odejmujemy 5 pkt. Oznaczmy teraz pola soczewek dopełniających półksiężyce do półokręgów przez P_1 i P_2. Pole $g = \pi x^2 – \pi R^2/2 – P_1 – \pi r^2/2 – P_2 = \pi R^2/2+\pi r^2/2–P_1–P_2$. Natomiast pole $f = \pi R^2/2–P_1 + \pi r^2/2–P_2$. Zatem pola figur f i g są równe.



6. Cyfra jedności iloczynu zależy tylko od cyfry jedności czynników, co wynika np. z algorytmu mnożenie pisemnego (za brak tej uwagi odejmujemy 2 pkt). Jeśli liczba kończy się na 1, 5, 6 lub 0, ostatnie cyfry jej potęg są zawsze jednakowe. Jeśli liczba kończy się na 4 lub 9, parzyste i nieparzyste potęgi kończą się tą samą cyfrą (dla czwórki na 4 lub 6, a dla dziewiątki na 9 lub1). Jeśli liczba kończy się jedna z pozostałych cyfr tzn. 2, 3, 7 lub 8, cyfra jedności w kolejnych potęgach zmienia się okresowo co 4. Potęgi n^{113} i n^{217} są odległe o wielokrotność czwórki, więc mają te same ostatnie cyfry.



7. Szukanym przekrojem jest trójkąt pokazany na rysunku. Jego podstawa ma długość $3\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu), a opuszczona na nią wysokość jest przekątną kwadratu o boku $3\sqrt{2}/2$ (trójkąt równoramienny o kącie przy podstawie 45°), czyli ma długość 3. Stąd pole trójkąta to $^1/_2\cdot 3\cdot 3\sqrt{2} = 4{,}5\sqrt{2}$.

8. Równania okręgów to $(x–3)^2 + (y–2)^2 =13$ i $(x+2)^2 + (y+1)^2 =10$ (2 pkt). Po odjęciu równań stronami otrzymujemy zależność $10x+6y–5 = 0$. Każda para (x, y) spełniająca oba równania kwadratowe spełnia też to równanie liniowe, w szczególności spełniają je punkty przecięcia okręgów. Przez 2 różne punkty przechodzi tylko jedna prosta, zatem musi być to równanie prostej przechodzącej przez te punkty. Za poprawne lecz bardziej skomplikowane rachunkowo rozwiązanie przyznajemy 6 pkt.

9. Kod nie może zaczynać się na 9 ani 8. Na 7 mamy 1 możliwość 789. Zaczynając od 6 mamy 3 kody: 689, 679, 678, dla 5 jest 6 możliwości: 589, 579, 578, 569, 568, 567 itd. Dla każdej cyfry początkowej k przepisujemy wszystkie ‘stare’ końcówki od poprzedniej cyfry i dokładamy listę ‘nowych’ z drugą cyfrą równą $k+1$, których jest o 1 więcej niż ‘nowych’ dodanych poprzednio, np. dla $k=4$ mamy 10 możliwości: 6 ‘starych’ – 489, 479, 478, 469, 468, 467 i 4 ‘nowe’ (poprzednio były 3 ‘nowe’) – 459, 458, 457, 456. To daje konstrukcję liczb trójkątnych. Zatem liczby kodów dla kolejnych cyfr to 15=10+5 dla cyfry 3, 21=15+6 dla 2 i 28+21+7 dla 1. Wszystkich jest 1+3+6+10+15+21+28=84.

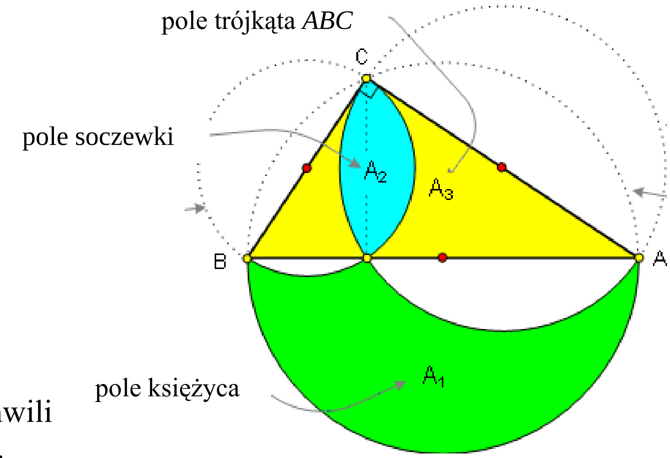
10. W koperty o numerach od 1 do 9 wkładamy kolejno 1 zł, 2 zł, 4 zł, …, 256 zł (do koperty o numerze n wkładamy $2^{n–1}$ zł. To daje w sumie 511 zł. Do ostatniej koperty wkładamy pozostałe pieniądze. Jeśli wypłacana kwota nie przekracza 512 zł, zapisujemy ją w systemie dwójkowym i wybieramy koperty o tych numerach, które odpowiadają rzędom dwójkowym, gdzie w zapisie stoi cyfra 1. Jeśli kwota jest większa, dajemy ostatnią kopertę, a pozostałą należność sumujemy z kopert 1 – 9 jak poprzednio. Każda liczba naturalna od 1 do $511 = 2^9–1$ ma jednoznaczny zapis dwójkowy mieszczący się na 9 miejscach pozycyjnych.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA
MECZ II

1. Ile razy cyfra 9 pojawia się w wyniku mnożenia 98765432109876543210…9876543210·9, gdzie w pierwszym czynniku grupa cyfr 9876543210 powtarza się 2016 razy?

2. Jaki jest największy wspólny dzielnik wszystkich liczb będących sześcianami całkowitych liczb dodatnich pomniejszonymi o te liczby?

3. Na bokach trójkąta prostokątnego ABC jako na średnicach wykreślono okręgi, które utworzyły tzw. księżyce Hipokratesa. Pokaż, że pole A_3 jest różnicą pól A_1 i A_2.

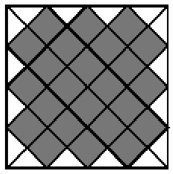


4. Czy liczba $3^{51}–5^{26}$ jest podzielna przez 4?

5. Mamy szachownicę o wymiarach 9×9. Na każdym jej polu stawiamy pionek. Po chwili zdejmujemy pionki i ustawiamy jeszcze raz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy pionek będzie zajmował teraz pole sąsiadujące z polem, które zajmował poprzednio? Sąsiednie pola mają wspólną krawędź.

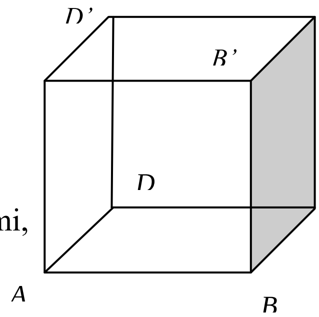
6. Niech M będzie największym elementem zbioru pewnych pięciu dodatnich liczb całkowitych. Wiadomo, że nie da się zbudować czworokąta używając boków o długościach będących różnymi liczbami z tego zbioru. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość M?

7. Na bokach kwadratu zaznaczamy punkty, które dzielą je na n równych części. Łączymy je potem liniami równoległymi do przekątnych, aby uzyskać podział kwadratu na mniejsze kwadraty i połówki kwadratów analogicznie do sytuacji z rysunku (dla n=4 są 24 małe kwadraty i 16 trójkątów). Ile powstanie małych kwadratów przy podziale boku na 117 części?



8. Jacek wykonał kilka eksperymentów i twierdzi, że każdy ciężar całkowity można zważyć na wadze szalkowej, używając tylko odważników o nominałach będących potęgami trójki. Jego starsza siostra Agatka twierdzi, że istnieją takie całkowite ciężary, których nie da się w ten sposób zważyć. Kto ma rację?

9. Przekrój sześcianu $ABCDA'B'C'B'$ o krawędzi długości 3 zawiera wierzchołek A oraz środki krawędzi BB' oraz DD'. Oblicz pole tego przekroju.



10. Pierścień kołowy o wewnętrznym promieniu 1 wypełniono 10 okręgami, z których każdy jest styczny do okręgów sąsiednich oraz do okręgów tworzących pierścień. Jaki jest zewnętrzny promień pierścienia?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Ponieważ 9876543210·9 = 88888888890 (9 ósemek) możemy dopisywać te same wyniki jeden za drugim, a ósemki z przeniesienia będą wpisywały się w miejsca zer. Ostateczny wynik będzie wyglądał tak 8888888889 8888888889…8888888889 88888888890 (między dziewiątkami jest po 9 ósemek). Czyli w wyniku będzie 2016 dziewiątek.

2. Liczby podane w zadaniu są postaci $n^3–n$ lub równoważnie $n(n^2–1) = n(n–1)(n+1)$. Są to iloczyny trzech kolejnych liczb całkowitych. Wśród nich musi być co najmniej jedna liczba parzysta (bo co druga jest parzysta) – nazwijmy ją D i dokładnie jedna podzielna przez 3 (bo co trzecia jest podzielna przez 3) nazwijmy ją T. Ponieważ liczby 2 i 3 są względnie pierwsze, a) jeśli $D=T$, to ta liczba dzieli się przez 6; b) jeśli $D\neq T$, to $D\cdot T$ dzieli się przez 6.
Za brak uwagi o względnej pierwszości 2 i 3 odejmujemy 3 pkt, np. 12 dzieli się przez 2 i 12 dzieli się przez 4, a z tego nie wynika, że 12 dzieli się przez 2·4. Zatem każdy iloczyn trzech kolejnych liczb dzieli się przez 6 i to jest wspólny dzielnik wszystkich takich iloczynów. Jest to też największy wspólny dzielnik, bo wśród tych liczb jest $2^3–2 = 6$, więc większy być nie może.

3. Niech przyprostokątne mają długości a, b, a przeciwprostokątna c. Oznaczmy przez T_1, i T_2 część pola trójkąta odpowiednio na lewo i na prawo od soczewki A_2. Oznaczmy przez p_1 i p_2 pola małych księżyców leżących pomiędzy trójkątem a księżyce A_1. Półkola oparte na przyprostokątnych dają z jednej strony sumę pól $\pi a^2/8 + \pi b^2/8 = \pi c^2/8$ (z twierdzenia Pitagorasa), a z drugiej $(A_2+p_1+T_1) + (A_2+T_2+p_2)$. Z kolei pole półkola opartego na przeciwprostokątnej jest równe tyle samo, bo $\pi c^2/8$, a z drugiej strony $A_1+p_1+p_2$. Z przyrównania tych wielkości mamy $A_2+p_1+T_1 + A_2+T_2+p_2 = A_1+p_1+p_2$, co daje $A_2+(T_1+A_2+T_2) = A_1$, czyli $A_2+A_3 = A_1$.

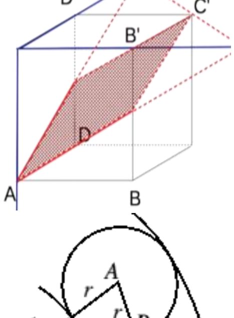
4. Dwucyfrową końcówką tej liczby jest 76=40+36, więc liczba dzieli się przez 4. Dwucyfrowa końcówka iloczynu zależy tylko od dwucyfrowych końcówek czynników, co wynika np. z algorytmu mnożenia pisemnego (za brak tej uwagi odejmujemy 2 pkt). Wszystkie potęgi 5 (poza pierwszą) kończą się na 25. Dwucyfrowe potęgi 3 układają się cyklicznie co 13 (co można sprawdzić bezpośrednio). Liczba 51 daje resztę 12 z dzielenia przez 13, co odpowiada końcówce 01. Różnica końcówek 01 i 25 daje 76. Odejmujemy po 2 pkt za nieprawidłowe podanie cechy podzielności przez 4 (bez równoważności lub jako 'dwie ostatnie cyfry dzielą się przez 4' – np. w liczbie 16 żadna z dwóch ostatnich cyfr nie dzieli się przez 4).

5. Jeśli pokolorujemy pola szachownicy na przemian na biało i czarno, to sąsiednie pola mają zawsze inne kolory. Zadanie polega więc na przestawieniu pionków z pól białych na czarne i na odwrót. To jest jednak niemożliwe, bo na szachownicy rozmiaru nieparzystego liczby pól białych i czarnych są różne. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi 0.

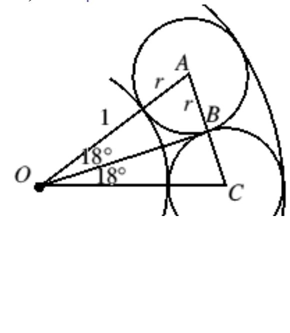
6. Niech zbiór składa się z liczb H, J, K, L, M ustawionych w porządku rosnącym. Czworokąt można utworzyć wtedy i tylko wtedy, gdy suma długości każdych trzech boków jest większa od długości czwartego boku. Wystarczy zatem, aby $M\geq J+K+L$ oraz $L\geq H+J+K$. Najmniejsze możliwe wartości H, J, K to 1, 2 i 3 odpowiednio, zatem najmniejsze L=6 i najmniejsze M=11.

7. Liczby małych kwadratów powstające w jednej ćwiartce dużego kwadratu wydzielonej przez jego przekątne, są kolejnymi liczbami trójkątnymi (dla podziału na n części otrzymujemy n–1 liczbę trójkątną). Zatem szukana liczba to $4T_{116}$. Liczby trójkątne to sumy kolejnych początkowych odcinków liczb naturalnych. $T_{116} = 1+2+\ldots+116 = 117\cdot 68 = 6786$. Zatem kwadracików jest 27 144.

8. Rację ma Jacek. Zapiszmy ciężar w systemie trójkowym. W zapisie tym występują cyfry 0, 1 i 2. Ponieważ 2+1 = 10 (lub równoważnie 2 = 10–1), przesuwając się od prawej do lewej w miejsce każdej cyfry 2 wstawiamy (-1) i jednocześnie kolejną cyfrę zwiększamy o 1 (zamiast 0 wpisujemy 1, zamiast 1 – 2, a zamiast 2 – wpisujemy zero i zwiększamy cyfrę w kolejnym rzędzie). W ten sposób otrzymamy wyjściową liczbę zakodowaną znakami 0, 1 i -1 odpowiadającymi kolejnym potęgom trójki. Jeśli w danym rzędzie jest 1, kładziemy odpowiadający jej odważnik na szalce przeciwnej niż ważony ciężar, a jeśli (-1) – na tej samej. Potęg, przy których stoi 0 nie używamy.



9. Płaszczyzna przekroju musi zawierać odcinek łączący środki krawędzi BB' i DD', czyli w szczególności zawiera środek sześcianu. Musi też zawierać odcinek łączący punkt A ze środkiem sześcianu, czyli odcinek AC'. Widać zatem, że ten przekrój jest rombem (cztery równe boki) o przekątnych długości $3\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu) i $3\sqrt{3}$ (przekątna sześcianu). Pole tego rombu to $\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{6}$.



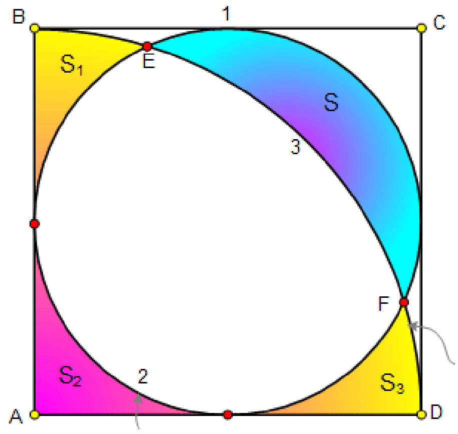
10. Środki 10 okręgów są rozłożone co 36°. Punkty ABC tworzą prostą, bo OB jest wspólną styczną okręgów (za założenie tego bez uzasadnienia odejmujemy 3 pkt). Mamy $\sin 18° = r/(1+r)$, skąd $r = \sin 18°/(1–\sin 18°)$, zatem szukany promień wynosi $1+2r = (1+\sin 18°)/(1–\sin 18°)$.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1. Trzej przyjaciele z boiska wypowiedzieli takie zdania:
   Adam: Dokładnie jeden z moich kolegów (Barnaba lub Celestyn) mówi prawdę.
   Barnaba: Dokładnie jeden z moich kolegów (Adam lub Celestyn) mówi prawdę.
   Celestyn: Żaden z moich kolegów (ani Adam, ani Barnaba) nie mówi prawdy.
   Kto skłamał?

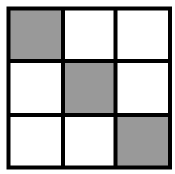


2. Podwieczorek, na którym było dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt, kosztował 1584 zł. Każdy chłopiec zapłacił 8 razy tyle groszy, ilu było chłopców, a każda dziewczyna 12 razy tyle groszy, ile było dziewcząt. Ilu było chłopców, a ile dziewcząt na podwieczorku?

3. *ABCD* jest kwadratem o boku długości 1. Figura 2 jest okręgiem wpisanym w kwadrat, a łuk 3 jest ćwiartką okręgu o środku w *A*. Pokaż, że $S = S_1+S_2+S_3$.

4. Prostopadłościan o krawędziach długości 22, 2, i 10 wpisano w sferę. Jaka jest długość krawędzi sześcianu wpisanego w taką samą sferę?

5. Niech *n* jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że 7*n* ma 2016 cyfr. Jaka jest cyfra jedności liczby *n*?



6. Do kwadratowego diagramu 3×3 należy wpisać cyfry od 1 do 9 (każdą w inne pole diagramu) w taki sposób, aby iloczyny liczb wynosiły: w I wierszu 12, w II wierszu 112, w I 216, w II kolumnie 12. Ile wynosi wówczas iloczyn liczb na głównej przekątnej diagramu?

7. Ile jest liczb dwucyfrowych, które mają największą możliwą liczbę dzielników?

8. W ilu podzbiorach zbioru {1, 2, 3, ..., 15, 16} suma elementu najmniejszego i największego jest równa 17?

9. Jaki jest największy wspólny dzielnik wszystkich liczb będących piątymi potęgami całkowitych liczb dodatnich pomniejszonymi o te liczby?

10. Sześcian o krawędzi długości 3 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z płaszczyzną podstawy kąt 60°. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2016/17
LICEA – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Załóżmy, że Celestyn mówi prawdę. Wtedy Adam i Barnaba kłamią. Ale wówczas ich zdania są prawdziwe. Zatem Celestyn skłamał. Czy ktoś jeszcze? Trzeba to sprawdzić. (do tego miejsca przyznajemy 5 pkt). Jeśli Celestyn kłamie, to przynajmniej jeden z jego kolegów mówi prawdę. Ale jeśli Barnaba mówi prawdę, to zdanie Adama jest prawdziwe, a jeśli Adam mówi prawdę, to zdanie Barnaby jest prawdziwe. Zatem rzeczywiście tylko Celestyn skłamał.

2. Wiemy, że $C = 2D$, każdy chłopiec zapłacił $8\cdot{}^{C}/_{100}$ zł, a dziewczyna $12\cdot{}^{D}/_{100}$ zł. To znaczy, że $8C^2/100 + 12D^2/100 = 1584$. Zatem $8\cdot 4D^2/100 + 12D^2/100 = 1584$, skąd $44D^2/100= 1584$, czyli $D^2 = 3600$ i $D = 60$, a $C = 120$.

3. Niech p oznacza pole każdej z części $S_2–S_1 = S_2–S_3$. Zachodzi $S+ S_2+2p$ to kwadrat pomniejszony o ćwiartkę koła o promieniu 1, czyli ma pole $1–\pi/4$. Natomiast $S_1+p+S_3+p+2S_2$ to kwadrat pomniejszony o koło o promieniu ½, czyli też ma pole $1–\pi/4$. Przyrównując te wielkości otrzymujemy $S+ S_2+2p = S_1+p+S_3+p+2S_2$, czyli $S = S_1+S_3+S_2$.

4. Promień r sfery opisanej na prostopadłościanie jest przekątną 1/8 tego prostopadłościanu i ma długość $\sqrt{147} = \sqrt{1^2+5^2+11^2}$. Niech sześcian wpisany w tę sferę ma krawędź długości $2x$. Wtedy $r = x\sqrt{3}$. Stąd $3x^2 = 147$, $x^2=49$, $x=7$, czyli sześcian ma krawędź długości 14.

5. Liczba $7n$ musi zaczynać się jedynką, po której nastąpi 2014 zer i pewna cyfra a. Dzieląc taką liczbę pisemnie przez 7, otrzymujemy w ilorazie powtarzający się okresowo ciąg sześciu cyfr 142857. Reszty z dzielenia także tworzą okresowy ciąg 3, 2, 6, 4, 5, 1. Ten cykl powtarza się 335 razy, bo $6\cdot 335 = 210$. Pozostają 4 ostatnie cyfry zero i a. Ten fragment dzielenia daje w ilorazie 1, 4, 2, 8 i odpowiednie reszty 3, 2, 6, 4. Do reszty 4 spisujemy cyfrę a i $40+a$ ma się dzielić przez 7. Aby a było najmniejsze musi być równe 2. Ponieważ 42:7=6, ostatnią cyfrą ilorazu będzie właśnie 6.

6. W pierwszych dwóch rzędach ani w kolumnach nie może być cyfry 5, zatem stoi ona w prawym dolnym rogu. $112 = 2^4\cdot$, ale 7 nie dzieli 12 ani 216, więc musi stać w środkowym rzędzie na końcu. 2^4 trzeba zapisać jako iloczyn różnych liczb jednocyfrowych, czyli $2\cdot 8$. Na środku tabeli musi być 2, bo 8 nie dzieli 12. Teraz $216 = 2^3\cdot 3^3$, przy czym 3^3 trzeba zapisać jako $3\cdot 9$. W lewym górnym rogu musi stać 3, bo 9 nie dzieli 12. Zatem iloczyn liczb na głównej przekątnej to 30.

3	1	4	12
8	2	7	112
9	6	5	
216	12		

7. Aby uzyskać jak najwięcej dzielników, musimy mnożyć jak najwięcej jak najmniejszych liczb różnych od 1. Można mnożyć same dwójki i wówczas uzyskamy maksymalnie $2^6=64$, czyli 7 dzielników (wybieramy potęgę dwójki od 0 do 6). Możemy mnożyć 2 i 3, np. $2^4\cdot 3=48$ (co daje $5\cdot 2 = 10$ dzielników, bo aby utworzyć dzielnik, wybieramy niezależnie potęgę dwójki od 0 do 4 i potęgę trójki od 0 do 1), ale lepiej wziąć $2^5\cdot 3 =$ **96**, co daje $6\cdot 2 = 12$ dzielników (wybieramy potęgę dwójki od 0 do 5 i potęgę trójki od 0 do 1), możemy też wziąć $2^3\cdot 3^2 =$ **72**, co także daje $4\cdot 3 = 12$ dzielników. Mnożąc trzy czynniki możemy wziąć $2^2\cdot 3\cdot 5 =$ **60** ($3\cdot 2\cdot 2=12$ dzielników) lub $2^2\cdot 3\cdot 7 =$ **84** ($3\cdot 2\cdot 2=12$ dzielników) lub $2\cdot 3^2\cdot 5 =$ **90** ($2\cdot 3\cdot 2=12$ dzielników). Inne liczby przekraczają zakres dwucyfrowy (ale trzeba sprawdzić te najmniejsze), np. $2^2\cdot 3^3 = 108$, $2^4\cdot 3^2=144$. Ostatecznie trzymujemy 5 liczb.

8. Jeśli ustalimy najmniejszą liczbę w podzbiorze, to mamy jednoznacznie wyznaczoną liczbę największą, a pozostałe możemy dobierać dowolnie spośród liczb leżących pomiędzy nimi. Na przykład dla najmniejszej liczby równej 1, największą jest 16. Pomiędzy nimi są liczby ze zbioru {2, 3, 4, ... , 15}. Możemy wybrać dowolny podzbiór tego zbioru, a jest ich 2^{14}. Jeśli najmniejszą liczbą jest 2, największą jest 15 i dobieramy wszystkie możliwe podzbiory zbioru {3, 4, 5, ... , 14}, których jest 2^{12}. Podobnie postępujemy, aż dojdziemy do najmniejszej liczby 8 i największej 9, pomiędzy którymi już nic nie ma. Zatem ostateczną odpowiedzią jest
$2^{14} + 2^{12} + 2^{10} +... + 2^2+2^0 = (2^{16}–1)/3 = 21845$.

9. Liczby podane w zadaniu są postaci $n^5–n$ lub równoważnie $n(n^4–1) = n(n^2–1)(n^2+1) = n(n–1)(n+1)(n^2+1) = n(n–1)(n+1)(n^2–4+5) = n(n–1)(n+1)(n^2-4) + n(n–1)(n+1)\cdot 5 = n(n–1)(n+1)(n–2)(n+2) + 5n(n–1)(n+1)$. Pierwszy składnik jest iloczynem pięciu kolejnych liczb całkowitych, czyli dzieli się przez 5 (bo co piąta liczba się dzieli), a drugi składnik też jest wielokrotnością pięciu. Oba składniki zawierają czynniki parzyste, więc cała liczba jest parzysta, oba składniki są też podzielne przez 3, bo zawierają iloczyny trzech kolejnych liczb. Zatem cała liczba jest podzielna przez $2\cdot 3\cdot 5 = 30$ (korzystamy z faktu, że 2, 3 i 5 są parami względnie pierwsze, wiec podzielność przez te liczby jest równoważna podzielności przez ich iloczyn –za brak tego stwierdzenia odejmujemy 3 pkt). Zatem 30 jest wspólnym dzielnikiem szukanych liczb, ale wśród nich jest też $30 = 2^5–2$, więc jest to też ich największy wspólny dzielnik.

10. Szukanym przekrojem jest trapez równoramienny pokazany na rysunku. Wierzchołek trójkąta na przedłużeniu *CC*’ nazwijmy *C*”. Wysokość trójkąta *BDC*” jest bokiem trójkąta równobocznego i ma długość $3\sqrt{2}$. Odcinek *CC*” jest wysokością tego trójkąta równobocznego, wiec ma długość $3\sqrt{6}/2$. Odcinek *C*’*C*” ma długość $3\sqrt{6}/2–3$. Stosunek *CC*” do *C*’*C*” ustala skalę podobieństwa dwóch czworościanów i skala ta wynosi $(3\sqrt{6}/2)$: $(3\sqrt{6}/2–3) = 3+\sqrt{6}$. W tym stosunku są też podstawy trapezu. Dolna ma $3\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu), wiec górna ma długość $3\sqrt{2}$ / $(3+\sqrt{6}) = 3\sqrt{2} – \sqrt{12}$. Trójkąty podobne na ścianie *BDC*” mają podstawy równe wysokościom, zatem wysokość małego trójkąta też ma $3\sqrt{2} – \sqrt{12}$, więc wysokość trapezu ma $\sqrt{12}$. Teraz obliczamy pole trapezu $½(3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} – \sqrt{12})\cdot\sqrt{12} = 3\sqrt{24}–6 = 6\sqrt{6}–6$.