KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

ELIMINACJE SZKOLNE
RACHUNEK LAMBDA – NOTATKI Z WYKŁADU

- -

1) Co to za okazja
2) Co to jest rachunek lambda
3) Jak działa rachunek lambda
4) Identyczność i zamiana liter
5) Definiowanie makrooperacji: TAK, NIE, PARA, ZŁÓŻ
6) Liczebniki Churcha i działania na nich

- -

Ad 1. 70-lecie polskiej informatyki. 23 XII 1948 roku z inicjatywy Kazimierza Kuratowskiego powołano zespół matematyków i inżynierów, którego zadaniem było zbudowanie w naszym kraju maszyny matematycznej – prekursora dzisiejszych komputerów.

Ad. 2. Co to jest rachunek lambda? W 1936 r. nie było jeszcze komputerów. Ale od XVII w. (Leibniz) istniał tzw. problem decyzji (Entscheidungsproblem): czy istnieje algorytmiczna (mechaniczna) procedura rozstrzygająca o prawdziwości twierdzeń logiki I rzędu. Co miałoby składać się na taka procedurę? W tymże roku Alonzo Church i Alan Turing znaleźli niezależnie sposób sformalizowania algorytmu co doprowadziło do rozwiązania problemu decyzji (negatywnego). Jeden posłużył się abstrakcyjnym modelem komputera (tzw. maszyna Turinga), a drugi rachunkiem lambda. Rachunek lambda to najprostszy język programowania. Wszystkie obiekty i operacje definiuje za pomocą jednego symbolu λ.

Ad. 3. Jak działa rachunek λ. Idea rachunku lambda opiera się na definiowaniu funkcji wzorem i wyliczaniu jej wartości. Zmienia się tylko symbolika zapisu oraz to, ze argumentami funkcji mogą być nie tylko liczby i litery.

Przykładowo funkcję f możemy zdefiniować wzorem: $f(x) = (x+3):2$ i obliczyć jej wartość dla liczby 5: $f(5) = (5+3):2 = 6:2 = 8$. W rachunku lambda nie musimy wprowadzać dodatkowych oznaczeń na każdą z funkcji. Funkcję, która bierze argument x i zwraca $(x+3):2$ zapiszemy jako $\lambda x.\ (x+3):2$. Obliczenie wartości funkcji oznaczamy symbolem @ (jednocześnie oznacza to koniec wzoru definiowanej funkcji). Taka konwencja oszczędza pisania nawiasów.

Przykłady:

$\lambda x.\ (x+3):2$ @ $5 = (5+3):2 = 8:2 = 4$ $\qquad\qquad$ $\lambda x.\ x+y$ @ $3 = 3+y$

Jeśli $f = \lambda x.\ (x+3):2$, to f @ $7 = \lambda x.\ (x+3):2$ @ $7 = (7+3):2 = 10:2 = 5$

$\lambda x.\ \lambda y.\ x+x+y$ @ 3 @ $4 = \lambda y.\ 3+3+y$ @ $4 = 3+3+4 = 10$

Wnioski:
* Wyliczyć funkcję to znaczy przepisać zwracane wyrażenie, zamieniając w nim za każdym razem literę stojącą przy λ na to, co zostało dane jako argument po znaku @.
* Działania upraszczamy zawsze do końca, tak długo jak się da.

Wyniki, które nie zawierają zapisów $\lambda x.$ … @, ani żadnych niewykonanych działań, tzn. takie, których nie da się już uprościć nazywamy **postacią normalną**.

Funkcje mogą być wyliczane nie tylko na liczbach jako argumentach, ale także na innych funkcjach. Wartościami funkcji także mogą być funkcje.

Przykłady. Zapisz w postaci normalnej.

$\lambda x.\ x$ @ $x = x$ $\qquad\qquad$ $\lambda x.\ (x$ @ $x)$ @ $\lambda y.\ y = \lambda y.\ y$ @ $\lambda y.\ y = \lambda y.\ y$

Jeśli jest więcej działań @, podstawienia wykonujemy w kolejności od lewej do prawej, chyba że inną kolejność narzucają nawiasy.

Przykłady. Zapisz w postaci normalnej.

$\lambda x.\ \lambda z.\ x$ @ $\lambda x.\ x$ @ $\lambda x.\ \lambda y.\ y = \lambda z.\ \lambda x.\ x$ @ $\lambda x.\ \lambda y.\ y = \lambda x.\ x$

$\lambda x.\ \lambda z.\ x$ @ $\lambda x.\ x$ @ $\lambda x.\ \lambda y.\ y$ @ $6 = \lambda x.\ x$ @ $6 = 6$

$\lambda x.\ \lambda y.\ (y$ @ $x)$ @ 3 @ $\lambda x.\ x + 4 = \lambda y.\ (y$ @ $3)$ @ $\lambda x.\ x + 4 = \lambda x.\ x + 4$ @ $3 = 3+4 = 7$

$\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ z$ @ x @ $y = \lambda y.\ \lambda z.\ z$ @ $y = \lambda z.\ z$

$\lambda n.\ \lambda m.\ n-m$ @ 6 @ $1 = \lambda m.\ 6-m$ @ $1 = 6-1 = 5$

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

Ad 4. Identyczność i kolizja liter. Zapis **$\lambda x.\ x$** nazywamy **identycznością**. Zawsze zwraca to samo, co pobiera. $\lambda x.\ x$ @ 5 = 5, $\lambda x.\ x$ @ x = x, $\lambda x.\ x$ @ $\lambda x.\ \lambda y.\ y = \lambda x.\ \lambda y.\ y$ itd. Identyczność jest jedna, bez względu użyte litery, tzn. $\lambda x.\ x = \lambda y.\ y = \lambda z.\ z = \ldots$ Podobnie możemy zapisać funkcję f wzorem $f(x) = x^2+3$ lub $f(y) = y^2+3$, a to jest ta sama funkcja.

Czasem może się zdarzyć taka sytuacja: $\lambda x.\ \lambda y.\ x$ @ $\lambda y.\ y$ @ 5 = $\lambda y.\ \lambda y.\ y$ @ 5 = ??? Co dalej? Napis $\lambda 5.\ 5$ nie ma sensu. Trzeba dokonać zamiany kolidujących liter, bo przecież $\lambda y.\ \lambda y.\ y$ to jest to samo, co $\lambda y.\ \lambda z.\ z$. Mamy zatem $\lambda y.\ \lambda y.\ y$ @ 5 = $\lambda y.\ \lambda z.\ z$ @ 5 = $\lambda z.\ z$.

Ad 5. Definiowanie makrooperacji. Wiemy już wszystko, co jest potrzebne, aby posługiwać się rachunkiem lambda. Teraz możemy definiować bardziej złożone mikrooperacje (jak w geometrii z podstawowych konstrukcji definiujemy makrokonstrukcje). Poznamy trzy takie mikrooperacje, ale w podobny sposób można zdefiniować liczby, działania na nich, działania logiczne i całą matematykę.

TAK i NIE

Niech **tak :=** $\lambda x.\ \lambda y.\ x$ zaś **nie :=** $\lambda x.\ \lambda y.\ y$. Te działania pozwalają wybrać jedną z dwóch opcji, bowiem:

tak @ A @ B = $\lambda x.\ \lambda y.\ x$ @ A @ B = $\lambda y.\ A$ @ B = A

nie @ A @ B = $\lambda x.\ \lambda y.\ y$ @ A @ B = $\lambda y.\ y$ @ B = B

Przykład:

tak @ nie @ tak @ nie @ tak = $\lambda x.\ \lambda y.\ x$ @ nie @ tak @ nie @ tak = $\lambda y.$ nie @ tak @ nie @ tak =
I sposób: = $\lambda y.\ \lambda x.\ \lambda y.\ y$ @ tak @ nie @ tak = **zamiana liter** = $\lambda y.\ \lambda x.\ \lambda z.\ z$ @ tak @ nie @ tak = $\lambda x.\ \lambda z.\ z$ @ nie @ tak = nie @ nie @ tak = **tak**
II sposób: = **zamiana liter w definicji nie** = nie @ nie @ tak = **tak**

Ile to jest (tak @ 7 @ 3) + (nie @ 4 @ 2)? = 7 + 2 = 9

PARA

Zdefiniujemy operację, które zapamięta dwa elementy i pozwoli wydostać każdy z nich:

para := $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ x @ $y)$

Przykład. Przetestuj, jak to działa.

para @ A @ B @ tak = $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ x @ $y)$ @ A @ B @ tak = $\lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ A @ $y)$ @ B @ tak =
= $\lambda z.\ (z$ @ A @ $B)$ @ tak = tak @ A @ B = A

para @ A @ B @ nie = $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ x @ $y)$ @ A @ B @ nie = $\lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ A @ $y)$ @ B @ nie =
= $\lambda z.\ (z$ @ A @ $B)$ @ nie = nie @ A @ B = B

Oblicz: para @ 3 @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak = ???

I sposób: = $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ x @ $y)$ @ 3 @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak =
= $\lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ 3 @ $y)$ @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak = $\lambda z.\ (z$ @ 3 @ (para @ 5 @ 7)) @ nie @ tak =
= (nie @ 3 @ (para @ 5 @ 7)) @ tak = (para @ 5 @ 7) @ tak = para @ 5 @ 7 @ tak =
= $\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ x @ $y)$ @ 5 @ 7 @ tak = $\lambda y.\ \lambda z.\ (z$ @ 5 @ $y)$ @ 7 @ tak = $\lambda z.\ (z$ @ 5 @ 7) @ tak =
= tak @ 5 @ 7 = 5

II sposób: para @ 3 @ (para @ 5 @ 7) @ nie @ tak = (para @ 5 @ 7) @ tak = para @ 5 @ 7 @ tak = 5

ZŁÓŻ

W języku rachunku lambda możemy wyrazić także złożenie funkcji.

złóż := $\lambda g.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (g$ @ $(f$ @ $x))$

Przykład. Sprawdźmy, że podana definicja faktycznie składa funkcje.

złóż @ $\lambda y.\ 2 \cdot y$ @ $\lambda z.\ z+10$ @ 3 = $\lambda g.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (g$ @ $(f$ @ $x))$ @ $\lambda y.\ 2 \cdot y$ @ $\lambda z.\ z+10$ @ 3 =
= $\lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda y.\ 2 \cdot y$ @ $(f$ @ $x))$ @ $\lambda z.\ z+10$ @ 3 = $\lambda x.\ (\lambda y.\ 2 \cdot y$ @ $(\lambda z.\ z+10$ @ $x))$ @ 3 = $\lambda y.\ 2 \cdot y$ @ $(\lambda z.\ z+10$ @ 3) =
= $\lambda y.\ 2 \cdot y$ @ 3+10 = = $\lambda y.\ 2 \cdot y$ @ 13 = $2 \cdot 13$ = 26

złóż @ $\lambda x.\ x+3$ @ $\lambda x.\ x+4$ = **zamiana liter** = $\lambda g.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (g$ @ $(f$ @ $x))$ @ $\lambda y.\ y+3$ @ $\lambda z.\ z+4$ =
= $\lambda f.\ \lambda x.\ (\lambda y.\ y+3$ @ $(f$ @ $x))$ @ $\lambda z.\ z+4$ = $\lambda x.\ (\lambda y.\ y+3$ @ $(\lambda z.\ z+4$ @ $x))$ = $\lambda x.\ (\lambda y.\ y+3$ @ $x+4)$ = $\lambda x.\ x+4+3$ = $\lambda x.\ x+7$

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

LICZEBNIKI CHURCHA

W rachunku lambda możemy zakodować nie tylko operacje, ale także obiekty matematyczne, np. liczby naturalne. Liczbie *n* odpowiada funkcja wykonująca *n* razy funkcję na argumencie.

0 := $\lambda f.\ \lambda x.\ x$ **1** := $\lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ x)$ **2** := $\lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (f\ @\ x))$ itd.

Przykład. Ile to jest 5 przemnożone trzykrotnie przez dwa?

$3\ @\ \lambda x.\ 2{\cdot}x\ @\ 5 = \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (f\ @\ (f\ @\ x)))\ @\ \lambda x.\ 2{\cdot}x\ @\ 5 = .\ \lambda x.\ (\lambda x.\ 2{\cdot}x\ @\ (\lambda x.\ 2{\cdot}x\ @\ (\lambda x.\ 2{\cdot}x\ @\ x)))\ @\ 5 =$
$\lambda x.\ 8{\cdot}x\ @\ 5 = 40.$

Na tych nowych liczbach możemy wykonywać działania tak, żeby wyniki zgadzały się ze 'starą' arytmetyką. Dla przykładu zdefiniujemy operacje następnika, dodawania i silni.

NASTĘPNIK

Dokładamy jeszcze jedno wykonanie funkcji.

następnik := $\lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (n\ @\ f\ @\ x))$

Przykłady

następnik $@\ 0 = \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (n\ @\ f\ @\ x))\ @\ 0 = \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (0\ @\ f\ @\ x)) = \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (\lambda f.\ \lambda x.\ x\ @\ f\ @\ x)) =$
$= \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (\lambda x.\ x\ @\ x)) = \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ x) = 1$

następnik $@\ 2 = \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (n\ @\ f\ @\ x))\ @\ 2 = \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (2\ @\ f\ @\ x)) =$
$\lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (\lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (f\ @\ x))\ @\ f\ @\ x)) = \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (\lambda x.\ (f\ @\ (f\ @\ x))\ @\ x)) = \lambda f.\ \lambda x.\ (f\ @\ (f\ @\ (f\ @\ x))) = 3$

DODAJ

Liczby Churcha możemy dodawać.

dodaj := $\lambda n.\ \lambda m.\ (m\ @$ następnik $@\ n)$

Ustalmy, że zapis $n+m$ oznacza dodaj @ n @ m.

Przykład.

$2 + 2 =$ dodaj $@\ 2\ @\ 2 = \lambda n.\ \lambda m.\ (m\ @$ następnik $@\ n)\ @2\ @\ 2 = \lambda m.\ (m\ @$ następnik $@\ 2)\ @\ 2 =$
$2\ @$ następnik $@\ 2 =$ następnik @ (następnik @ 2) = następnik @ 3 = 4

SILNIA

Zakładając, że mamy w rachunku lambda działanie mnożenia, zdefiniujemy i przetestujemy silnię.

Niech **krok** := $\lambda p.$ $\big($para @ $\big($(p @ tak) · (p @ nie)$\big)$ @ $\big($(p @ nie) + 1$\big)\big)$,

silnia := $\lambda n.$ (n @ krok @ (para @ 1 @ 1) @ tak).

silnia @ 0 = 0 @ krok @ (para @ 1 @ 1) @ tak = (para @ 1 @ 1) @ tak = 1

silnia @ 5 = 5 @ krok @ (para @ 1 @ 1) @ tak = 4 @ krok @ (para @ (1 · 1) @ (1 + 1)) @ tak =
= 4 @ krok @ (para @ 1 @ 2) @ tak = 3 @ krok @ (para @ (1 · 2) @ (2 + 1)) @ tak =
= 3 @ krok @ (para @ 2 @ 3) @ tak = 2 @ krok @ (para @ (2 · 3) @ (3 + 1)) @ tak =
= 2 @ krok @ (para @ 6 @ 4) @ tak = 1 @ krok @ (para @ (6 · 4) @ (4 + 1)) @ tak =
= 1 @ krok @ (para @ 24 @ 5) @ tak = (para @ (24 · 5) @ (5 + 1)) @ tak =
= (para @ 120 @ 6) @ tak = 120

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

UWAGI ORGANIZCYJNE

1. **Czas trwania** wykładu 45 min. Czas pisania zadań 45 min. Nie trzeba powiedzieć wszystkiego. Nie trzeba rozwiązać wszystkiego. Na ogół do wejścia do finału wystarczy mieć ponad 50% (w klasach młodszych pewnie mniej), więc lepiej mniej, a dobrze.
2. **Terminy** konkursu szkolnego
   SP 4-6: 19 XI – część zadaniowa, 23 XI – odsył wyników, 1 XII – finał
   SP 7-8 i GM 3: 26 XI – część zadaniowa, 30 XI – odsył wyników, 8 XII – finał
   LO: 3 XII – część zadaniowa, 7 XII – odsył wyników, 15 XII – finał
3. Wykład można zrobić w dniu eliminacji szkolnych lub w piątek poprzedzający dzień eliminacji.
4. W SP wykład dla Młodzików i Juniorów warto zrobić osobno. W przeciwnym razie stracą na tym jedni i drudzy.
5. Wyniki proszę przesłać w pliku xls bez żadnych dodatkowych formatowań (wzór do pobrania ze strony konkursu).
6. W przypadku dużej liczby uczniów i dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich nazwisk, ale należy podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej.
7. Prac nie trzeba przesyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyleń wyników z danej szkoły od średniej, możemy poprosić o przesłanie prac.
8. Każdy podpunkt jest oceniany zero-jedynkowo.
9. Finały we wszystkich kategoriach odbywają się w Instytucie Matematycznym UWr, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław (dojazd z dworca PKP i PKS autobusami 145 i 146 w kierunku Sępolna i Biskupina, należy wysiąść na przystanku Most Grunwaldzki), początek o godz. 10:15 w sali HS. Przebieg finału opisano na stronie WWW konkursu.

KLUCZ ODPOWIEDZI

1. Alonzo Church
2. 1936 r. (pierwsza opublikowana praca)
3. a) 42 b) 12 c) 5 d) 18 e) 2 f) 21 g) 19 h) 81 i) 25 j) 81 k) 4
4.
   a) nie (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienione litery)
   b) $\lambda x.\ x$ (lub zmienione litery, lub identyczność)
   c) nie (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienione litery)
   d) nie (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienione litery)
   e) $\lambda y.\ \lambda x.\ x$ (lub $\lambda x.\ \lambda y.\ y$, lub zmienione litery, lub nie)
   f) 195
   g) 3
5.
   a) 82
   b) 48
   c) 23
   d) $\lambda x.\ 3 \cdot x+11$ (lub zmienione litery, lub np. $\lambda x.\ 11+3 \cdot x$ itp.)
   e) $\lambda x.\ 8 \cdot x+5$ (lub zmienione litery, lub np. $\lambda x.\ x \cdot 8+5$ itp.)
6. a) lewa b) prawa c) prawa d) środkowa e) lewa
7. a) 31 b) 6 c) 56 d) 1 e) 16 f) 256
8. a) 3 b) 45 c) 5050

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

ELIMINACJE SZKOLNE: SENIORZY (LO) szkoła: ....

imię i nazwisko:.. klasa: ....

Zad. 1. Kto wymyślił rachunek lambda?

....

Zad. 2. W którym roku?

....

Zad. 3. Napisz postać normalną wyrażeń.

a) $\lambda x.\ x$ @ 42

....

b) $\lambda y.\ y+1$ @ 11

....

c) $\lambda n.\ \lambda m.\ n+m$ @ 2 @ 3

....

d) $\lambda n.\ \lambda m.\ n+m+m$ @ 8 @ 5

....

e) $\lambda n.\ \lambda m.\ m-n$ @ 4 @ 6

....

f) $\lambda n.\ \lambda m.\ \lambda k.\ (m+n)\cdot(n-k)$ @ 4 @ 3 @ 1

....

g) $\lambda n.\ \lambda m.\ n\cdot m+n+m$ @ 3 @ 4

....

h) $\lambda n.\ \lambda m.\ (m+2)\cdot(n+1)$ @ 8 @ 7

....

i) $\lambda f.\ (f$ @ 3) + (f @ 4) @ $\lambda n.\ n\cdot n$

....

j) $\lambda f.\ (f$ @ (f @ 3)) @ $\lambda n.\ n\cdot n$

....

k) $\lambda f.\ (f$ @ (f @ 3 @ 7) @ 3)) @ $\lambda n.\ \lambda m.\ (n+m):2$

....

Zad. 4. Uprość zapisy.

a) $\lambda x.\ x$ @ nie

....

b) $\lambda x.\ x$ @ $\lambda y.\ y$ @ $\lambda z.\ z$ @ $\lambda x.\ x$

....

c) tak @ tak @ tak @ nie @ tak

....

d) nie @ nie @ nie @ tak @ nie

....

e) tak @ $\lambda x.\ x$

....

f) tak @ nie @ tak @ (12·14) @ (13·15)

....

g) tak @ 3 @ (24·13)

....

Zad. 5. Oblicz wyniki działań.

a) (tak @ 23 @ 68) + (para @ 59 @ 31 @ tak)

....

b) (tak @ 8 @ 9)·(nie @ 7 @ 6)

....

c) złóż @ $\lambda x.\ 2\cdot x+9$ @ $\lambda x.\ 3\cdot x+1$ @ 2

....

d) złóż @ $\lambda x.\ x+4$ @ $\lambda x.\ 3\cdot x+7$

....

e) złóż @ $\lambda x.\ 2\cdot x+3$ @ $\lambda x.\ 4\cdot x+1$

....

KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2018

Zad. 6. Podkreśl jedną z definicji, która spełnia wymaganą własność.

a) pierwszy @ (para @ *A* @ *B*) = *A*

pierwszy := $\lambda p.$ (p @ tak) $\lambda p.$ (p @ nie) $\lambda p.$ (nie @ p)

b) czyZero @ 0 = tak oraz czyZero @ n = nie, gdy n jest liczbą naturalną różną od zera

czyZero := $\lambda n.$ (n @ ($\lambda x.$ tak) @ nie) $\lambda n.$ (n @ nie @ ($\lambda x.$ tak)) $\lambda n.$ (n @ ($\lambda x.$ nie) @ tak)

c) zamień @ (para @ *A* @ *B*) = para @ *B* @ *A*

zamień := $\lambda p.$ (nie @ tak @ p) $\lambda p.$ (para@(p@tak)@(p@nie)) $\lambda p.$ (para @ (p@nie) @ (p@tak))

d) zaprzecz @ tak = nie oraz zaprzecz @ nie = tak

zaprzecz := $\lambda b.$ (b @ tak @ nie) $\lambda b.$ (b @ nie @ tak) $\lambda b.$ (para @ tak @ nie @ b)

e) lub @ nie @ nie = nie oraz lub @ tak @ tak = lub @ tak @ nie = lub @ nie @ tak = tak

lub := $\lambda a. \lambda b.$ (a @ tak @ b) $\lambda a. \lambda b.$ (a@(b@tak@tak)@(b@nie@tak)) $\lambda a. \lambda b.$ (a@b@tak)

Zad. 7. Oblicz liczebnik Churcha. Wynik zapisz cyframi.

a) 8 @ (dodaj @ 3) @ 7

……………………………………………………………………………………

b) złóż @ 3 @ 2

……………………………………………………………………………………

c) złóż @ 7 @ 8

……………………………………………………………………………………

d) 1 @ 1

……………………………………………………………………………………

e) 2 @ 2 @ 2

……………………………………………………………………………………

f) 8 @ 2

……………………………………………………………………………………

Zad. 8. Niech A := $\lambda n.$ $\big($$n$ @ $\big($$\lambda p.$ $\big($para @ (p @ dodaj) @ $\big(($p$ @ nie) + 1$\big)\big)\big)$ @ (para @ 0 @ 1) @ tak$\big)$. Oblicz.

a) A @ 2

……………………………………………………………………………………..

b) A @ 9

……………………………………………………………………………………..

c) A @ 100

……………………………………………………………………………………..