

KONKURS MATEMATYCZNY – KOMA 2014
SZKOŁY PODSTAWOWE – ELIMINACJE SZKOLNE
PARKIETY Z WIELOKĄTÓW – KONSPEKT WYKŁADU

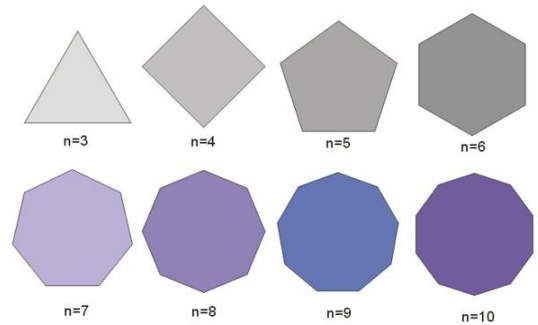
- 1) Wielokąty foremne i ich własności (suma kątów trójkąta i wielokąta, kąt wewnętrzny wielokąta foremnego)
- 2) Wielościąny foremne, półforemne i foremnościenne (definicje, przykłady)
- 3) Parkiety cykliczne foremne, półforemne i foremnościenne (definicje, przykłady, ilości, notacja)
- 4) Parkiety dualne (konstrukcja)
- 5) Inne przykłady parkietów (nieforemne, prawidłowe, niecykliczne, z ornamentem)

Ad 1. Wielokąt foremny ma boki i kąty jednakowe. Oba warunki są istotne (np. romb, prostokąt i kwadrat). Jest ich nieskończenie wiele (coraz drobniejsze podziały okręgu).

Ponieważ n -kątnik można podzielić na $n-2$ trójkątów (ogólnie $n-2$ trójkąty) przekątnymi wychodzącymi z jednego wierzchołka, suma kątów wewnętrznych n -kątnika to $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Ponieważ n -kątnik foremny ma jednakowe kąty, każdy z nich ma $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ (lub korzystając z kąta środkowego obliczamy kąt wewnętrzny jako $\frac{180^\circ - 360^\circ/n}{2}$). Zatem:

- trójkąt foremny ma kąt $1 \cdot 180^\circ / 3 = 60^\circ$,
- kwadrat ma kąt $2 \cdot 180^\circ / 4 = 90^\circ$,
- pięciokąt foremny ma kąt $3 \cdot 180^\circ / 5 = 108^\circ$,
- 30-kąt foremny ma kąt $28 \cdot 180^\circ / 30 = 168^\circ$.



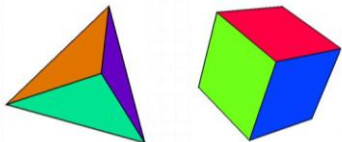
Kąty wewnętrzne są coraz większe (tępe), a wielokąty coraz bardziej przypominają koło,

Ad 2. Wielościąg foremny ma ściany foremne jednakowe i jednakowe naroża, więc z każdej strony wygląda tak samo. Oba warunki są istotne (np. dwupiramida trójkątna i rombościan). Przykłady – Jakie kształty mają ściany? Porównać naroża.

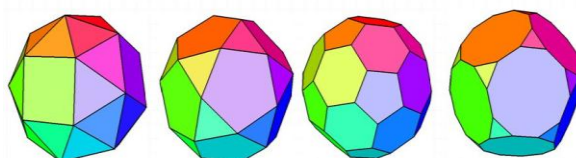
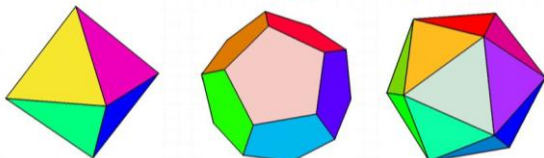
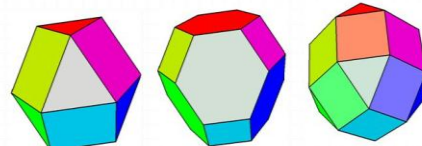
Wielościąg półforemny ma ściany foremne niejednakowe i jednakowe naroża, więc z każdej strony wygląda tak samo. Przykłady – Ile jest rodzajów ścian? Jakie mają kształty? Porównać naroża.

Wielościąg foremnościenne ma ściany foremne (jednakowe lub nie), naroża niejednakowe. Przykłady.

Wielościąny foremne:

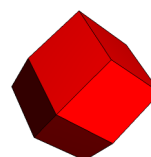
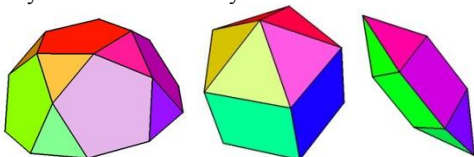


Przykładowe wielościąny półforemne:



Przykładowe wielościąny foremnościenne:

Dwanastościan rombówy



Ad 3. Parkiet to pokrycie płaszczyzny wielokątami bez dziur i zachodzenia płytek. Płytki stykają się **całymi bokami**. Jeśli układ płytek powtarza się po pewnym przesunięciu parkietu, to parkiet jest **cykliczny**.

Parkiet foremny jest uzyskany z jednej foremnej płytki (**jednopłytkowy**), a wierzchołki są jednakowe (**prawidłowy**). W wierzchołku może stykać się od 3 do 6 płytek (zbadać kąty). Takie parkiety są tylko trzy, co pokazał Pitagoras w VI w. p.n.e. Oznaczamy je: 3-3-3-3-3-3 (w wierzchołku styka się 6 trójkątów foremnych), 4-4-4-4 (w wierzchołku stykają się 4 kwadraty), 6-6-6 (w wierzchołku stykają się 3 sześciokąty foremne). Innych nie ma, bo kąty muszą wypełnić płaszczyznę wokół punktu, czyli kąt 360° , a jedyne dzielniki liczby 360, które są kątami wielokątów foremnych to 60° , 90° i 120° .

Parkiet półforemny jest uzyskany z kilku foremnym płytek (**wielopłytkowy**), ale wierzchołki są jednakowe (**prawidłowy**). Jest 8 takich parkietów. W wierzchołku może schodzić się 3, 4, lub 5 wielokątów. Rozważmy przypadek, gdy schodzą się 3.

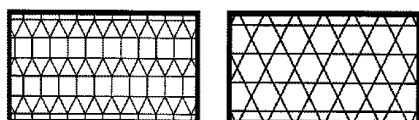
Niech mają $k \leq m \leq n$ boków. Wtedy $\frac{180-360}{k} + \frac{180-360}{m} + \frac{180-360}{n} = 360$, skąd $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$.

Niech $k=3$. Wtedy $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{6}$, skąd możliwe n to 7, 8, 9, 10, 11, 12, a wyliczone m to odpowiednio 42, 24, 28, 25, brak, 12.

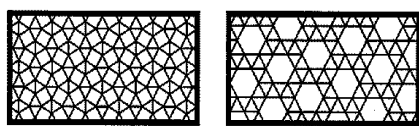
Teraz każdy parkiet badany empirycznie, czy domyka się we wszystkich wierzchołkach. Istnieje tylko **3-12-12**.

Analogicznie dla $k=4$ możliwe n to 5, 6, 7, 8, wyliczone m to 20, 12, brak, 8. Istniejące układy to **4-6-12** i **4-8-8**.

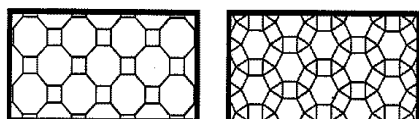
KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2014



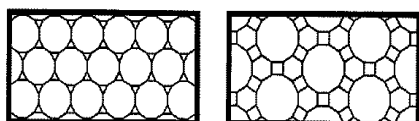
Dla $k=5$ możliwe n to 5 i 6, wyliczone m to 10, brak. Możliwych układów brak. Istnieją więc 3 parkiety z trzema płytkami w wierzchołku. Podobnie badamy parkiety z czterema i pięcioma płytkami w wierzchołku. Oto możliwe parkiety. Wśród nich **dwupłytkowe** to 3-3-3-4-4, 3-3-4-3-4, 3-6-3-6, 3-3-3-3-6, 4-8-8, 3-12-12, a **trzy płytkowe** to 3-4-6-4 i 4-6-12. Rozpoznawanie z kodu i kodowanie z modelu. Czym różni się 6-3-3-6 od 3-6-3-6? A 3-4-6-4 od 4-3-4-6? Wyliczanie z kątów brakujących wielokątów, np. 4-6-X lub 6-6-X-X.



Parkiet foremnościenny jest uzyskany z różnych płytek foremnych (wielopłytkowy) i wierzchołki nie są jednakowe (**nieprawkidłowy**). Jest ich nieskończenie wiele. Przykłady, notacja. W tym wypadku symbol parkietu nie wyznacza jego kształtu geometrycznego. Na slajdach pokazano różne parkiety z opisem 3-3-3-4-4 / 3-3-4-3-4 albo 3-4-4-6/3-4-6-4.



Ad 4. Parkiet dualny do danego ma wierzchołki w środkach jego ścian, przy czym łączymy wierzchołki ze ścian sąsiednich. Przykłady dla foremnych i półforemnych. Parkiety dualne do foremnych są foremne (parkiet z kwadratów jest samodualny). Dualne do półforemnych są czasem nieforemne.



Ad 5. Parkiet nieforemny ma płytki nieforemne (mogą być mieszane z foremnyymi). Naroża mogą być przystające (prawkidłowy) lub nie (nieprawkidłowy). Każdy trójkąt i każdy czworokąt (także wklęsły) tworzą parkiety cykliczne

prawkidłowe. Do dziś jest znanych 14 pięciokątów (z dokładnością do przekształcenia afinicznego), które tworzą parkiety cykliczne nieprawkidłowe (patrz slajd). Niektóre są uzyskane jako dualne do półforemnych (patrz slajdy). Płaszczyznę pakietują także niektóre wielokąty wklęsłe.

Parkiet rozetowy – wzór powtarza się po pewnym obrocie płaszczyzny.

Parkiet niecykliczny – wzór nie powtarza się po żadnym przesunięciu ani po obrocie płaszczyzny. Pierwsze przykłady znaleziono w XX wieku (parkiety Penrose'a).

Parkiet z ornamentem – na płytce narysowany jest ornament, który tworzy dodatkowy wzór na parkiecie.

UWAGI

1. Czas trwania wykładu z pokazem: 45-60 min. Czas pisania zadań 45 min.
2. Nie można używać kalkulatorów, bo nie wszyscy je przyniosą (zresztą nie s potrzebne).
3. Termin konkursu szkolnego: 18 XI (wykład może być 17 XI). Termin odesłania wyników: 22 XI. Finał 6 XII, godz. 10:15, sala HS Instytutu Matematycznego UWr (pl. Grunwaldzki 2/4, tel na portiernię 71 3757414).
4. Wyniki w pliku .xls pisane minuskułą. Trzy kolumny: imię/nazwisko/wynik. Nazwa szkoły w nagłówku.
5. W przypadku dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich, ale należy podać liczbę uczestników wykładu i części zadaniowej.
6. Każdy podpunkt oceniamy zero-jedynkowo (4 pkt za zadania 1-13 i 15-16, 8 pkt za zadanie 14).

KLUCZ

Zad. 1. 120° , 140° , 150° , 156°

Zad. 7. T, T, T, N

Zad. 13. trójkąty foremne
trójkąty prostokątne
nie istnieje
romby

Zad. 2. 3, 6, 4, 0

Zad. 8. T, N, T, T

Zad. 3. 3, 5, 5, 4 lub 5

Zad. 9. T, T, T, N

Zad. 4. 3, 8, ∞ , 14

Zad. 10. N, N, N, T

Zad. 14. 4-4-4-4 foremny
3-3-3-4-4 półforemny
3-4-6-4/3-3-4-3-4 foremnościenny
3-4-6-4/4-4-3-3-3-/3-3-3-3-3-3-3
foremnościenny

Zad. 5. 0, 3, 2, 2

Zad. 11. T, N, T, N

Zad. 6. 3, 12, 8, nie ma

Zad. 12. T, N, T, T

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2014

ELIMINACJE SZKOLNE

SZKOŁA PODSTAWOWA

Imię i nazwisko: klasa:

Zad. 1. Jaką miarę ma kąt wewnętrzny foremnego:

- a) 6-kąta?
- b) 9-kąta?
- c) 12-kąta?
- d) 15-kąta?

Zad. 2. Ile płytek schodzi się w wierzchołku parkietu foremnego?

- a) najmniej
- b) najwięcej
- c) kwadratowych
- d) pięciokątnych

Zad. 3. Ile płytek schodzi się w wierzchołku parkietu półforemnego?

- a) najmniej
- b) najwięcej
- c) trójkątnych i kwadratowych
- d) trójkątnych i sześciokątnych

Zad. 4. Ile jest różnych parkietów

- a) foremnych?
- b) półforemnych?
- c) foremnościennych?
- d) jednopłytkowych cyklicznych z 5-kątów

Zad. 5. Ile jest parkietów półforemnych, z wierzchołkami:

- a) z 6 wielokątów?
- b) z 5 wielokątów?
- c) z 3 trójkątów i 2 kwadratów?
- d) z trzech rodzajów wielokątów?

Zad. 6. Jakiego wielokąta brakuje w tym parkiecie półforemnym?

- a) 6-X-6-X
- b) 3-X-X
- c) 4-X-X
- d) 3-X-3-X-3-X

Zad. 7. Parkiet jednopłytkowy można otrzymać z każdego

- a) trójkąta TAK / NIE
- b) czworokąta wypukłego TAK / NIE
- c) czworokąta wklęsłego TAK / NIE
- d) pięciokąta TAK / NIE

Zad. 8. Płaszczyznę parkietuje pewien

- a) pięciokąt TAK / NIE
- b) pięciokąt foremny TAK / NIE
- c) sześciokąt TAK / NIE
- d) sześciokąt foremny TAK / NIE

Zad. 9. W każdym wierzchołku parkietu foremnego schodzi się k płytek. O liczbie tej wiadomo, że:

- a) $2 < k < 7$ TAK / NIE
- b) $3 \leq k \leq 6$ TAK / NIE
- c) $k \neq 5$ TAK / NIE
- d) $k \geq 4$ TAK / NIE

Zad. 10. Czy istnieje parkiet nieforemny prawidłowy, w którego każdym wierzchołku schodzą się:

- a) trzy trójkąty? TAK / NIE
- b) cztery trójkąty? TAK / NIE
- c) trzy czworokąty? TAK / NIE
- d) cztery czworokąty? TAK / NIE

KONKURS MATEMATYCZNY KO-MA 2014

Zad. 11. Czy w jednym wierzchołku parkietu półforemnego mogą stykać się:

- a) 4 trójkąty i sześciokąt? TAK / NIE
- b) kwadrat i 2 sześciokąty? TAK / NIE
- c) 3 trójkąty i 2 kwadraty? TAK / NIE
- d) 2 trójkąty, kwadrat i dwunastokąt? TAK / NIE

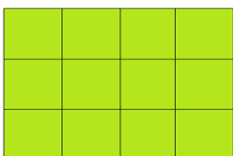
Zad. 12. Parkiet dualny do

- a) foremnego musi być foremny TAK / NIE
- b) półforemnego musi być półforemny TAK / NIE
- c) półforemnego musi być prawidłowy TAK / NIE
- d) półforemnego musi być jednopłytkowy TAK / NIE

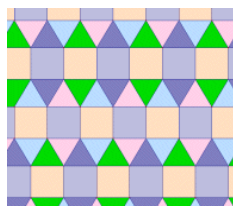
Zad. 13. Opisz płytki, z jakich składa się parkiet dualny do:

- a) 6-6-6
.....
- b) 4-8-8
.....
- c) 3-3-6-6
.....
- d) 3-6-3-6
.....

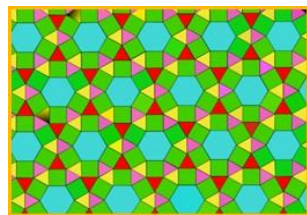
Zad. 14. Podaj symbol każdego parkietu i jego rodzaj.



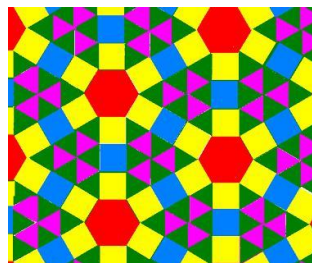
- a)
.....



- b)
.....

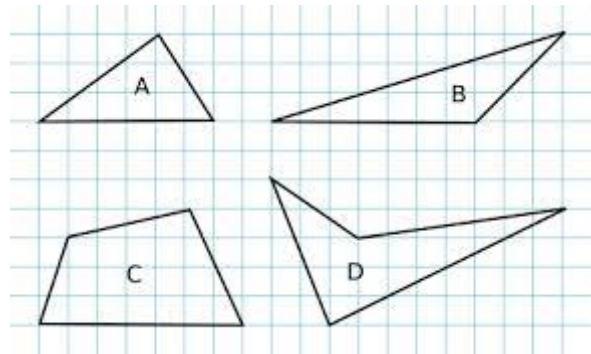


- c)
.....



- d)
.....

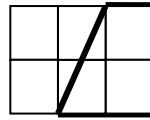
Zad. 15. Zaprojektuj parkiet z podanych płytek. Dołącz rysunki na osobnej kartce.



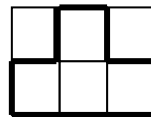
- a) trójkąt ostrokątny
- b) trójkąt rozwartokątny
- c) czworokąt wypukły
- d) czworokąt wklęsły

Zad. 16. Zaprojektuj po dwa parkiety z każdej z podanych płytek. Dołącz rysunki na osobnej kartce.

- a) trapez prostokątny



- b) tetromino



- c) kwadrat z przekątną

