DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

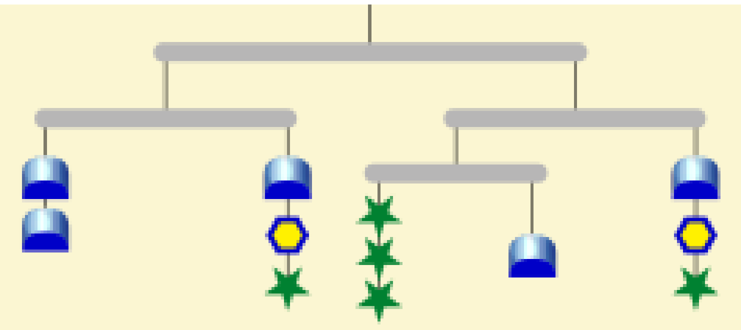
MECZ I

1) Janek wybrał pieniądze ze skarbonki. Mama dołożyła mu drugie tyle, a brat pożyczył mu 6 zł. Janek poszedł do sklepu papierniczego i wydał połowę posiadanych pieniędzy. Potem oddał mamie dług, a bratu – połowę długu. Ile pieniędzy mu zostało?

2) Suma dwóch liczb dodatnich jest równa 49. Jeśli w większej skreślimy jedną cyfrę, to uzyskamy mniejszą z tych liczb. Jakie to liczby?

3) Pewnego dnia w księgarni sprzedano 10 podręczników do informatyki i 5 do matematyki wydawnictwa Eureka za łączną kwotę 350 zł. Następnego dnia sprzedano 7 tych samych podręczników do informatyki i 4 do matematyki za kwotę 260 zł. Ile kosztowała każda z książek?

4) Całkowita masa odważników na tej wadze wynosi 48. Ile waży każdy z nich?



5) Podczas gry w pokera podsłuchano rozmowę czterech królów:
król Kier: Schowałem jokery.
król Trefl: Król Kier kłamie.
król Karo: Król Trefl kłamie.
król Pik: Król Karo kłamie.
Ilu królów skłamało?

6) W prostokącie różnica odległości punktu przecięcia przekątnych od jego dwóch sąsiednich boków wynosi 2 cm. Jakie są długości boków tego prostokąta, jeśli jego obwód ma 60 cm?

7) Karol wybrał dwie liczby całkowite dodatnie i ustawił je na pierwszym i drugim miejscu ciągu. Każdy następny wyraz tego ciągu tworzył jako sumę dwóch poprzednich liczb. Na piątym miejscu znalazła się liczba 2016. Ile najwięcej mogła wynosić pierwsza liczba?

8) Agata ma pudło kartoników z cyframi 1, 2 i 3. Układa z nich liczby wielocyfrowe w taki sposób, aby wszystkie liczby dwucyfrowe utworzone z kolejnych cyfr tej liczby wielocyfrowej były różne. Ile cyfr ma największa liczba, którą może ułożyć Agata?

9) Adam i Bernard grają w następującą grę: zaczynają od stosu składającego się ze 123 kamieni i wykonują ruchy na przemian; w każdym ruchu każdy z graczy musi usunąć co najmniej jeden i co najwyżej sześć kamieni. Gracz, który usunie ostatni kamień lub ostatnie kamienie, wygrywa. Grę rozpoczyna Adam. Który z chłopców może zapewnić sobie wygraną i jaki powinien być jego pierwszy ruch?

10) Dwóm ogrodnikom skoszenie ogrodu zajmuje 8 dni. Jeden z nich jest leniwy, a drugi pracowity. Kiedy leniwy nie pracuje, pracowity kosi ogród w ciągu 12 dni. Ile czasu potrzebuje na skoszenie ogrodu leniwy?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

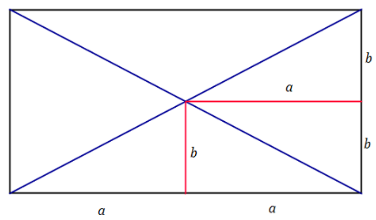
1. Jeśli Janek wyjął ze skarbonki S zł, to na zakupach miał już $2S+6$. Po zakupach zostało mu $S+3$. S oddał mamie, a 3 bratu i nic mu nie zostało. Za rozwiązanie na przykładzie przyznajemy 3 pkt.

2. Większa z tych liczb musi być dwucyfrowa $\underline{AB}$ (za brak uzasadnienia odejmujemy 2 pkt). Trzeba rozważyć przypadek, gdy skreślamy w niej cyfrę dziesiątek lub jedności(za nierozważenie jednego z tych przypadków odejmujemy 4 pkt). Jeśli skreślamy cyfrę dziesiątek, otrzymujemy $\underline{AB} + B = 49$, co daje sprzeczność, bo obie liczby są tej samej parzystości i nie mogą dawać nieparzystej sumy. Zatem skreślana jest cyfra jedności. Wtedy mamy $\underline{AB}+A=49$ i są 2 możliwości (za nierozpatrzenie jednej odejmujemy 3 pkt) $A=4$ (wtedy $B=5$) oraz $A=3$ (wtedy $B=16$ i to nie jest cyfra). Jedynym rozwiązaniem jest liczba 45. Za odpowiedz bez uzasadnienia jej jedyności przyznajemy 2 pkt.

3. Mamy $7I+4M = 260$ oraz $10I+5M = 350$, czyli po uproszczeniu $2I+M = 70$. Stąd $8I+4M = 280$ i widać z porównania z pierwszym równaniem, że $I=20$. Wobec tego $M=30$. Za odpowiedź ze sprawdzeniem, ale bez uzasadnienia, że inne liczby nie spełniają warunków zadania, przyznajemy 3 pkt.

4. Oznaczmy masy odważników: C – cylinder, S – sześciokąt, G – gwiazdka. Z najniższego poziomu wagi widzimy, że $C=3G$. Z lewego ramienia wynika, że $3C = C+S+G$, zatem $6G=4G+S$, czyli $S=2G$. Stąd masa wszystkich odważników to $24G = 48$, czyli $G=2$, $S=4$ i $C=6$.

5. Niezależnie od tego, czy król Kier mówi prawdę, czy kłamie, zawsze dwóch królów kłamie. Aby to zauważyć, należy rozpatrzyć dwa przypadki: w pierwszym król Kier kłamie, a w drugim – mówi prawdę. Za nierozważenie wszystkich możliwości przyznajemy 3 pkt.



6. Niech a i b oznaczają odległości punktu przecięcia przekątnych prostokąta od jego dwóch sąsiednich boków. Wówczas boki tego prostokąta mają długości $2a$ i $2b$. Zachodzą równości $a–b = 2$, czyli $a = b+2$ oraz $4a+4b = 60$, czyli $a+b = 15$, skąd $b+2+b = 15$ i $2b = 13$ cm. Drugi bok ma $2a = 17$ cm.

7. Niech Karol wybrał na początku liczby A i B. Na trzecim miejscu stała liczba $A+B$, na czwartym $A+2B$, a na piątym $2A+3B$. Jeśli A ma być największe, B musi być najmniejsze możliwe, czyli np. równe 1. Wtedy $2A= 2013$, ale to jest liczba nieparzysta. Zatem $B>1$. Jeśli $B=2$, to $2A = 2010$, więc $A=1005$.

8. Największa możliwa liczba to 3323122113. Ma 10 cyfr. Zaczynamy od 3 i na każdym następnym miejscu wpisujemy największą możliwą cyfrę, która nie powoduje powtórzenia liczy dwucyfrowej, ani nie kończy procedury wypisywania. Dochodzimy do 3323 następną cyfrą nie może być ani 3, ani 2, bo mamy powtórzenie, więc wpisujemy 1. Teraz najwyższą możliwą cyfrą jest 3, ale to urywa procedurę na 332313, bo po 3 wykorzystaliśmy już wszystkie cyfry. Zatem wstawiamy 2, bo to pozwala kontynuować wypisywanie. Podobnie w miejscu 33231221 wpisanie 3 lub 2 zatrzyma procedurę (bo potem nie da się już nic wpisać) natomiast wpisanie 1 pozwoli dopisać jedną cyfrę więcej. Dalej już nic nie można dopisać, bo po każdej cyfrze wystąpiła już każda inna. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia jej maksymalności przyznajemy 5 pkt. Za odpowiedź 9-cyfrową przyznajemy 2 pkt.

9. Strategię wygrywającą ma Adam. Powinien usunąć 4 kamienie. Wówczas zostanie ich 119, co jest liczbą podzielną przez 7. Bernard musi zabrać między 1 a 6 kamieni, a wówczas Adam znowu dobiera kamienie tak, aby została liczba podzielna przez 7. Po pewnym czasie przed Bernardem zostanie 7 kamieni i ile by nie wziął, zawsze coś zostanie do zabrania w ostatnim ruchu przez Adama. Za poprawną strategicznie rozgrywkę (wg wielokrotności 7), ale na konkretnym przykładzie, przyznajemy 4 pkt.

10. Pracowity w ciągu dnia kosi 1/12 ogrodu, zatem w ciągu 8 dni skosi 8/12 ogrodu, a leniwy w tym czasie skosi resztę równą 4/12 ogrodu. **I sposób**. Widać, że pracowity kosi 2 razy szybciej, więc leniwemu skoszenie ogrodu zajmie 24 dni. **II sposób**. Skoro w 8 dni leniwy kosi 4/12, to aby skosił cały ogród (czyli 12/12), potrzebuje 3 razy tyle czasu, więc zajmie mu to $3·8=24$ dni. Za poprawne lecz bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ II

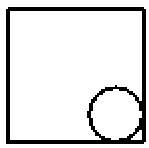
1. Budzik spóźnia się 6 minut na dobę. O ile trzeba go przesunąć w przód o godzinie 21:00, aby następnego dnia o godzinie 6:00 wskazywał dokładny czas?

2. Czy na stole o wymiarach 1 m na 2 m można postawić zastawę, w skład której wchodzą 24 kwadratowe talerze o boku 25 cm oraz 20 prostokątnych półmisków o wymiarach 15 na 20 cm? Żaden z elementów zastawy nie może stać na innym, nie mogą nachodzić na siebie nawzajem ani wystawać poza stół.

3. Jacek narysował trójkąt o bokach różnych długości i zmierzył jego kąty. Jeden miał 80°, a różnica miar pozostałych wynosiła 60°. Starsza siostra Jacka – Agatka, powiedziała mu, że na pewno się pomylił, ale on upierał się, że zmierzył wszystko dobrze. Kto miał rację?

4. W księgarni *Bestseller* największy ruch jest w poniedziałki, a w następne dni tygodnia liczba klientów sukcesywnie spada. Właściciel postanowił, że w każdy poniedziałek książki będą o 10% droższe, a w każdy piątek – o 10% tańsze od ich ceny detalicznej. Janek kupił w poniedziałek komiks za 5,50 zł. Ile by zaoszczędził, gdyby kupił go w piątek?

5. Wewnątrz kwadratowego pudełka o krawędzi 5 cm toczy się bez poślizgu moneta o promieniu 1 cm. Przetacza się raz wzdłuż brzegu kwadratu i wraca na swoje miejsce. Jaką drogę pokonuje w tym ruchu środek okręgu?



6. Ile razy cyfra 9 pojawia się w wyniku mnożenia 98765432109876543210…9876543210·9, gdzie w pierwszym czynniku grupa cyfr 9876543210 powtarza się 2016 razy?

7. Wydawca pięćsetstronicowej książki pt. "Dlaczego nie dzielimy przez zero" wydrukował numery stron w specjalny sposób. Każda cyfra 0 ma kolor czerwony, a pozostałe cyfry – czarny. Ile cyfr każdego z kolorów pojawiło się w numeracji stron?

8. Marek znalazł w sali od matematyki tajemnicze urządzenie przypominające kalkulator. Było ono wyposażone jedynie w klawisze z cyframi, klawisz * oraz wyświetlacz. Po kilku próbach Marek zorientował się, że po wpisaniu liczby oraz wciśnięciu * liczba nieparzysta była zmniejszana o 5, zaś parzysta była zmniejszana 5 razy. Po wpisaniu pewnej liczby Marek dwa razy nacisnął klawisz * i na wyświetlaczu pojawiła się liczba 18. Jaką liczbę Marek wpisał na początku?

9. Ile jest liczb 5-cyfrowych o różnych cyfrach od 1 do 5, mających tę własność, że liczba utworzona z pierwszej cyfry dzieli się przez 1, utworzona z pierwszych 2 cyfr dzieli się przez 2, z pierwszych 3 cyfr dzieli się przez 3, z pierwszych 4 cyfr dzieli się przez 4, a z pierwszych 5 cyfr dzieli się przez 5?

10. Na każdej z dwóch prostych równoległych wybrano po pięć punktów. Jaka jest największa możliwa liczba trójkątów, których wierzchołkami są te punkty?

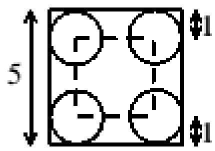
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Od 21 do 6 dnia następnego mija $^{9}/_{24} = {}^{3}/_{8}$ doby. Skoro na dobę spóźnienie wynosi 6 minut, to na 3/8 doby wyniesie 3/8 tego spóźnienia (zakładamy, że zegar chodzi miarowo, tylko wolniej niż powinien). Zatem należy go przesunąć w przód o $^{3}/_{8}$ z 6 minut = $2^{1}/_{4}$ minuty.

2. Pole powierzchni stołu wynosi 20 000 cm^2, zaś łączna powierzchnia zastawy to 24·25·25 + 20·15·20 = 24·625 + 20·300 = 21 000 > 20000, zatem nie ma szans, by naczynia zmieściły się na stole. Za rozwiązanie pokazujące, że nie można ułożyć zastawy w jakiejś konkretnej konfiguracji (np. jeden obok drugiego) przyznajemy 5 pkt.

3. Rację miała Agatka. Niech mniejszy z nieznanych kątów ma miarę α. Wtedy drugi z nich ma miarę $100-\alpha$, a różnica ich miar wynosi $100-2\alpha = 60°$. Zatem $\alpha = 20°$, czyli drugi z nieznanych kątów ma 80°. Ale wówczas trójkąt byłby równoramienny, a Jacek narysował trójkąt różnoboczny. Za poprawne obliczenie miar kątów 5 pkt.

4. W poniedziałek komiks kosztował 5, 50 zł, czyli jego cena detaliczna wynosiła 5 zł. W piątek komiks kosztowałby 4,50 zł, czyli Janek zaoszczędziłby 1 zł.



5. Środek okręgu zakreśla kwadrat o boku 3 cm, czyli pokonuje drogę 12 cm.

6. Ponieważ 9876543210·9 = 88888888890 (9 ósemek) możemy dopisywać te same wyniki jeden za drugim, a ósemki z przeniesienia będą wpisywały się w miejsca zer. Ostateczny wynik będzie wyglądał tak 8888888889 8888888889…8888888889 88888888890 (między dziewiątkami jest po 9 ósemek). Czyli w wyniku będzie 2016 dziewiątek.

7. Do ponumerowania wszystkich pięciuset stron potrzeba 9·1+90·2+401·3 = 9+180+1203 = 1392 cyfry. Wśród nich zero pojawia się 9 razy w liczbach dwucyfrowych, po 9 razy w zbiorach liczb {101,102,   , 109}, {201, 02, …209}, …, {401, 402, …, 409} oraz {110, 120, … 190}, {210, 220, .., 290}, …, {410, 420, …, 490} oraz po 2 w liczbach 100, 200, 300, 400 i 500. Zer jest więc 9+ 9·8+2·5 = 91. Zatem w książce jest 91 czerwonych cyfr oraz 1301 czarnych. Każda pomyłka rachunkowa to 3 punkty mniej.

8. Wynik 18 mógł się pojawić albo po podzieleniu pewnej liczby parzystej przez 5 (czyli liczby 90) albo po odjęciu liczby 5 do pewnej liczby nieparzystej (czyli od 23). Zatem po pierwszym naciśnięciu * na wyświetlaczu mogło być 90 lub 23. Jeżeli było to 90, to mogliśmy ją uzyskać albo po wpisaniu na początku 450 (zostanie podzielone przez 5), albo po wpisaniu 95 (zostanie pomniejszone o 5). Natomiast jeśli poprzednią liczbą było 23, to nie mogliśmy jej uzyskać z dzielenia przez 5 (bo 23·5 jest nieparzyste), ani z odejmowania liczby 5 (bo 23+5 jest parzyste). Czyli Marek mógł wpisać na początku 95 lub 450. Za odpowiedź ze sprawdzeniem przyznajemy 3 pkt. Za pominięcie w analizie jednego przypadku przyznajemy 5 punktów.

9. Nie ma takich liczb. Za odpowiedź bez uzasadnienia 2 pkt. Piątą cyfrą musi być 5 – cecha podzielności (2 pkt). Drugą i czwartą muszą być cyfry parzyste (żeby odpowiednia liczba była podzielna przez 2 i 4) – 2 pkt. Zatem pierwsza i trzecia cyfra muszą być nieparzyste (2 pkt). Czwarta cyfra nie może być 4 (bo 14, ani 34 nie dzieli się przez 4), zatem musi to być 2 (2 pkt), więc drugą cyfrą jest 4. Ale wówczas pierwsze trzy cyfry to 143 lub 341 i ich suma nie dzieli się przez 3 (2 pkt).

10. Podstawę trójkąta na pierwszej prostej możemy wybrać na 10 sposobów (4 z nich zawierają po 2 punkty, 3 zawierają 3 punkty, 2 zawierają 4 punkty i 1 zawiera 5 punktów). Dla każdej z podstaw trzeci wierzchołek trójkąta na drugiej prostej możemy wybrać na 5 sposobów, co daje 10·5 = 50 trójkątów. Możemy jeszcze zamienić proste rolami, zatem wszystkich trójkątów może być 100.

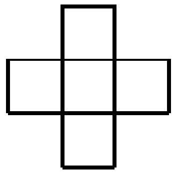
DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA

MECZ III

1. Dyrektor szkoły napisał regulamin wycieczki, który pani sekretarka wydrukowała na 16 kartkach formatu A4. Dyżurny Jasiek wywiesił je na tablicy korkowej, układając w prostokąt i przypinając każdą kartkę osobno za pomocą 4 pinezek. Po lekcjach zobaczyła to pani sekretarka i przepięła tak, że jedna pinezka mogła przytrzymywać kilka sąsiednich kartek. Ile najwięcej pinezek mogła odzyskać pani sekretarka?

2. W pola diagramu z rysunku Janek wpisał cyfry od 2 do 6 tak, że powstały dwie liczby trzycyfrowe będące kwadratami. Jaką cyfrę wpisał Janek w środkowe pole?



3. Jacek pomyślał pewną liczbę dwucyfrową, której suma jej cyfr wynosiła 9, a po ich przestawieniu liczba zmniejszała się o liczbę, której suma cyfr też wynosiła 9. Jaką liczbę pomyślał Jacek?

4. W gospodarstwie rolnika Franciszka w tym roku zebrano jęczmień z 36 ha. Na kolejny rok zaplanował on wzrost wydajności plonów z 1 ha o 8%, a wzrost całego zbioru jęczmienia o 20%. O ile ha musi zwiększyć obszar uprawy jęczmienia, aby wykonać ten plan?

5. Jaka jest najmniejsza liczba, której kwadrat dzieli się przez 2016?

6. Trzej przyjaciele z boiska wypowiedzieli takie zdania:
   Adam: Dokładnie jeden z moich kolegów (Barnaba lub Celestyn) mówi prawdę.
   Barnaba: Dokładnie jeden z moich kolegów (Adam lub Celestyn) mówi prawdę.
   Celestyn: Żaden z moich kolegów (ani Adam, ani Barnaba) nie mówi prawdy.
   Kto skłamał?

7. Podwieczorek, na którym było dwa razy więcej chłopców niż dziewcząt, kosztował 1584 zł. Każdy chłopiec zapłacił 8 razy tyle groszy, ilu było chłopców, a każda dziewczyna 12 razy tyle groszy, ile było dziewcząt. Ilu było chłopców, a ile dziewcząt na podwieczorku?

8. Jaki jest największy wspólny dzielnik wszystkich liczb, które są iloczynami trzech kolejnych dodatnich liczb całkowitych?

9. Zapis a^7 (czytaj: a do potęgi siódmej) oznacza siedmiokrotne mnożenie liczby a przez siebie. Jaka jest ostatnia cyfra liczby $5^{2016} + 10^{2016} + 9^{2016}$?

10. Jaką największą liczbę dzielników może mieć liczba dwucyfrowa?

EDYCJA XV – ROK SZKOLNY 2016/17
SZKOŁY PODSTAWOWE – RUNDA ELIMINACYJNA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Do upięcia ogłoszenia Jasiek potrzebował $16\cdot 4=64$ pinezki, niezależnie od tego, w jaki prostokąt je ułożył. Mógł to być prostokąt 1×16, 2×8 lub 4×4. W tych przypadkach sekretarce wystarczyło odpowiednio $2\cdot 17$, $3\cdot 9$ i $5\cdot 5$ pinezek. Zatem mogła odzyskać aż $64–25 = 39$ pinezek.

2. Z podanych cyfr można utworzyć następujące trzycyfrowe kwadraty: $256 = 16^2$, $324 = 18^2$ i $625 = 25^2$. Inne odpadają, bo kwadraty liczb do 14 są za małe, 15^2 ma dwie dwójki, kwadraty liczb od 19 do 21 zawierają zero lub jedynkę, 17^2 i 23^2 ma dziewiątkę, 22^2 ma ósemkę, a 24^2 ma siódemkę, dalsze kwadraty są za duże. Za brak uzasadnienia odejmujemy 3 pkt. Środkowa cyfra musi być wspólna dla dwóch kwadratów, więc musi nią być 2.

3. Liczby, które mają sumę cyfr 9 i zmniejszają się po przestawieniu cyfr to: 90, 81, 72, 63, 54. Te liczby dzielą się przez 9 zarówno przed przestawieniem cyfr jak i po przestawieniu (bo suma cyfr się nie zmienia). Różnica liczb podzielnych przez 9 jest nadal podzielna przez 9, więc Jacek mógł pomyśleć każdą z podanych liczb. Za obliczanie i sprawdzanie wszystkich różnic odejmujemy 3 pkt. W tym zadaniu stosujemy cechę podzielności przez 9. Zwracamy uwagę na to, że ma ona formę równoważności. Tu stosujemy implikację: jeśli liczba ma sumę cyfr podzielną przez 9, to dzieli się przez 9. Jeśli uczeń poda implikację przeciwną, odejmujemy 2 pkt.

4. Oznaczmy przez x plon z 1ha w tym roku. Wtedy tegoroczny zbiór jęczmienia wynosi $36x$. Za rok zbiór jęczmienia ma wynieść $1{,}2\cdot 36x$, przy czym plon z 1 ha wyniesie $1{,}08x$, a obsiane jęczmieniem pole będzie miało $36+y$ ha. Stąd $(36+y)\cdot 1{,}8x = 1{,}2\cdot 36x$. Zatem $(36+y)\cdot 1{,}08 = 36\cdot 1{,}2$ i dalej $y = 4$. Franciszek musi obsiać jęczmieniem 4 ha więcej.

5. Po rozłożeniu na czynniki pierwsze mamy $2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Aby liczba była kwadratem, każdy czynnik musi w niej wystąpić parzystą liczbę razy, zatem szukany najmniejszy kwadrat to $2^6\cdot 3^2\cdot 7^2 = (2^3\cdot 3\cdot 7)^2 = (8\cdot 21)^2 = 168^2$. Za odpowiedź 168 bez uzasadnienia przyznajemy 3 pkt. Za bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt. Za metodę polegającą na sprawdzaniu wielu przypadków przyznajemy do 6 pkt.

6. Załóżmy, że Celestyn mówi prawdę. Wtedy Adam i Barnaba kłamią. Ale wówczas ich zdania są prawdziwe. Zatem Celestyn skłamał. Czy ktoś jeszcze? Trzeba to sprawdzić. (do tego miejsca przyznajemy 5 pkt). Jeśli Celestyn kłamie, to przynajmniej jeden z jego kolegów mówi prawdę. Ale jeśli Barnaba mówi prawdę, to zdanie Adama jest prawdziwe, a jeśli Adam mówi prawdę, to zdanie Barnaby jest prawdziwe. Zatem rzeczywiście tylko Celestyn skłamał.

7. Wiemy, że $C = 2D$, każdy chłopiec zapłacił $8\cdot {}^{C}/_{100}$ zł, a dziewczyna $12\cdot {}^{D}/_{100}$ zł. To znaczy, że $8C^2/100 + 12D^2/100 = 1584$. Zatem $8\cdot 4D^2/100 + 12D^2/100 = 1584$, skąd $44D^2/100= 1584$, czyli $D^2 = 3600$ i $D = 60$, a $C = 120$.

8. Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych musi być co najmniej jedna liczba parzysta (bo co druga jest parzysta) – nazwijmy ją D i dokładnie jedna podzielna przez 3 (bo co trzecia jest podzielna przez 3) nazwijmy ją T. Ponieważ liczby 2 i 3 są względnie pierwsze,
a) jeśli D=T, to ta liczba dzieli się przez 6; b) jeśli $D\neq T$, to $D\cdot T$ dzieli się przez 6.
Za brak uwagi o względnej pierwszości 2 i 3 odejmujemy 3 pkt, np. 12 dzieli się przez 2 i 12 dzieli się przez 4, a z tego nie wynika, że 12 dzieli się przez $2\cdot 4$. Zatem każdy iloczyn trzech kolejnych liczb dzieli się przez 6 i to jest wspólny dzielnik wszystkich takich iloczynów. Jest to też największy wspólny dzielnik, bo wśród tych liczb jest też $1\cdot 2\cdot 3 = 6$, więc większy być nie może.

9. Potęgi 5 kończą się na 5, potęgi 10 kończą się na 10, a potęgi 9 kończą się na 9 (nieparzyste) lub 1 (parzyste). Wynika to z faktu, że ostatnia cyfra iloczynu liczb zależy tylko od ostatniej cyfry czynników, co z kolei wynika np. z algorytmu mnożenia pisemnego. To samo zachodzi dla ostatniej cyfry sumy liczb. Za brak uzasadnienia powyższych własności odejmujemy 4 pkt. Zatem ostatnią cyfrą podanej liczby jest $5+1 = 6$.

10. Aby uzyskać jak najwięcej dzielników, musimy mnożyć jak najwięcej jak najmniejszych liczb różnych od 1. Można mnożyć same dwójki i wówczas uzyskamy maksymalnie $2^6=64$, czyli 7 dzielników. Możemy mnożyć 2 i 3 i wtedy uzyskamy maksymalnie $2^3\cdot 3^2=72$, co daje $4\cdot 3=12$ dzielników (aby utworzyć dzielnik wybieramy niezależnie potęgę dwójki od 0 do 3 i potęgę trójki od 0 do 2).