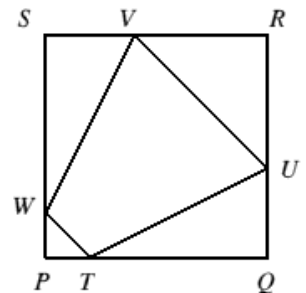




**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/18**  
**FINAŁ – GIMNAZJA**

- 1) Ile jest dziewięciocyfrowych wielokrotności 24 mających postać liczby z czkawką 'pqrpqrpqr'? Cyfry  $p$ ,  $q$  i  $r$  nie muszą być różne.
- 2) Między dwoma budynkami stoi drabina. Jest tak umieszczona, że jeśli ją pochylić w stronę jednego domu, to sięga okna na wysokości 12 metrów, a jeśli w stronę drugiego, to sięga zaledwie 9 metrów od poziomu ulicy. Oba położenia drabiny są prostopadłe. Jaka jest długość drabiny i szerokość ulicy?
- 3) Janek zapisał sumę liczb całkowitych od 0 do 20. Następnie przy trzech składnikach zmienił znak z  $+$  na  $-$  i otrzymał wynik 100. Na ile sposobów mógł to zrobić?

- 4) Na bokach kwadratu  $PQRS$  umieszczono punkty  $T$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  w taki sposób, że  $|PT| = 1$ ,  $|QU| = 2$ ,  $|RV| = 3$  i  $|SW| = 4$ . Pole  $TUVW$  stanowi połowę pola  $PQRS$ . Jaka długość ma bok kwadratu?



- 5) Wyznacz wszystkie prostopadłościany, których długości krawędzi są liczbami całkowitymi, a pole powierzchni jest liczbowo równe sumie długości krawędzi.
- 6) W dwunastokącie foremnym połączono co trzeci wierzchołek, otrzymując kwadrat. Jaki jest stosunek pól tych figur?
- 7) Rozwiąż układ równań w trójkach liczb rzeczywistych.

$$\begin{cases} (y+z)(x+y+z) = 1 \\ (z+x)(x+y+z) = 2 \\ (x+y)(x+y+z) = 5 \end{cases}$$

- 8) Na bokach trójkąta  $ABC$  obrano punkty  $T$  i  $U$  na  $AB$  (w kierunku od  $A$  do  $B$ ),  $P$  i  $Q$  na  $BC$  (w kierunku od  $B$  do  $C$ ) oraz  $R$  i  $S$  na  $CA$  (w kierunku od  $C$  do  $A$ ). Okazało się, że  $SP \parallel AB$ ,  $UR \parallel BC$ , a  $QT \parallel CA$  oraz że odcinki  $SP$ ,  $UR$  i  $QT$  przecinają się w jednym punkcie. Ponadto  $|PQ| = |RS| = |TU|$ . Udowodnij, że  $\frac{1}{|PQ|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|BC|} + \frac{1}{|CA|}$ .
- 9) Znajdź wszystkie liczby naturalne  $k$ , dla których  $2^k + 1472$  jest kwadratem liczby naturalnej.
- 10) Jaka funkcja  $f$  spełnia dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  równość  $f(x) + 2f(1-x) = x^2$ ?