



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA IIIX – ROK SZKOLNY 2013/14**  
**LICEA – WIELKI FINAŁ**

- 1) Antoni i Bartosz startowali w zawodach lekkoatletycznych. W biegu przełajowym przyjęli różne strategie. Antoni połowę czasu maszerował, a połowę biegł, natomiast Bartosz połowę dystansu maszerował, a połowę biegł. Obaj chłopcy maszerują w tempie 3 km/h, a biegają ze stałą prędkością 6 km/h. Który z chłopców był pierwszy na mecie?
- 2) Jeśli od liczby 3-cyfrowej odjąć 7, różnica jest podzielna przez 7. Jeśli odjąć 8, różnica jest podzielna przez 8. A jeśli odjąć 9, różnica dzieli się przez 9. Co to za liczba?
- 3) Ile razy cyfra 1 pojawia się w zapisie liczb naturalnych od 1 do miliona?
- 4) Czy w czworościanie będącym narożnikiem odciętym z sześcianu zachodzi własność, że kwadraty pół ścian przyległych do wierzchołka sześcianu dają w sumie kwadrat pola ściany przeciwległej do tego wierzchołka?
- 5) Udowodnij, że liczba  $2^{1005} + 3^{1005}$  jest podzielna przez 11.
- 6) Znajdź wszystkie funkcje  $f$  o dziedzinie  $\mathbf{R}$  spełniające dla każdego  $x$  warunek:  
 $x^2 \cdot (f(x))^2 + 1 = 2x \cdot f(x)$ .
- 7) Ciąg liczb od 1 do 1 000 000 ustawiamy losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczby od 1 do 100 wystąpią w nim w kolejności rosnącej (niekoniecznie obok siebie)?
- 8) Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w punkcie  $A$ . Ze środka  $O$  większego okręgu poprowadzono promień  $OB$  styczny do mniejszego okręgu w punkcie  $C$ . Oblicz rozwartość kąta  $BAC$ .
- 9) Funkcja  $f$  zdefiniowana jest wzorem
$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(a-c)(b-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} - 1,$$
gdzie  $a, b$  i  $c$  to pewne stałe. Jest to funkcja kwadratowa (bo pojawiają się w niej tylko wyrazy wolne, jednomiany zawierające  $x$  i jednomiany zawierające  $x^2$ ). Łatwo sprawdzić, że  $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ , a ponieważ  $a, b$  i  $c$  mogą być trzema różnymi liczbami,  $f$  jest zatem funkcją kwadratową o trzech miejscach zerowych. Jak to możliwe?
- 10) W graniastosłupie prawidłowym 100-kątnym wybrano jedną przekątną ściany. Ile jest przekątnych ścian do niej równoległych?