



**DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE**  
**EDYCJA XI – ROK SZKOLNY 2011/12**  
**LICEA – WIELKI FINAŁ**

1. W skrzyni na ciemnym strychu wielodzietnej rodziny państwa Kowalskich jest 15 par rękawiczek. Wszystkie pary są kompletne, są wykonane z tej samej wełny, tym samym ścięciem lecz każda jest w innym kolorze. Janek Kowalski sięgnął do skrzyni i wybrał 4 rękawiczki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie trafił na żadną parę?
2. Wykaż, że pole trójkąta wpisanego w okrąg jednostkowy jest mniejsze od  $\pi/2$ .
3. Pokaż, że iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych powiększony o 1 jest kwadratem.
4. Wykaż, że w dowolnym prostokącie odcinki łączące wierzchołek ze środkami nieprzyległych doń boków są trójsiecznymi przekątnej.
5. Rozwiąż nierówność  $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} < 0$ .
6. Ile wynosi  $\cos 18^\circ$ ?
7. Dla jakich liczb całkowitych funkcja wymierna  $(x^4 - 4x^2 + x + 6)/(x+2)$  przyjmuje całkowite wartości?
8. Czworokąt wpisano w półokrąg tak że jeden bok stanowi średnicę. Następnie przedłużono dwa przeciwległe boki nie będące średnicami i punkt ich przecięcia połączono z punktem przecięcia przekątnych czworokąta. Pokaż, że ten odcinek jest prostopadły do średnicy półokręgu.
9. Dany jest ciąg  $a_n = 120/(n+1)$ , dla  $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$ . Losujemy trzykrotnie jeden z jego wyrazów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że utworzą one w kolejności losowania ściśle malejący ciąg liczb całkowitych?
10. Wykaż, że jeśli dwie liczby naturalne są sumami kwadratów dwóch liczb naturalnych, to liczba będąca ich iloczynem też ma tę własność.