XXII MISTRZOSTWA POLSKI W GEOMETRII ELEMENTARNEJ
WROCŁAW 8 VI 2024

Na rozwiązanie zadań (niekoniecznie wszystkich) masz 3 godziny zegarowe. Rozwiązanie każdego zadania zapisz na osobnej kartce opatrzonej imieniem i nazwiskiem, numerem zadania i symbolem kategorii. Zakończenie rozwiązywania każdego z zadań zgłoś dyżurnemu jurorowi przez podniesienie ręki. POWODZENIA!

Zad. 1. W trójkącie prostokątnym ABC spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego C dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości 4 i 9. Wysokość ta dzieli wyjściowy trójkąt na dwa mniejsze, w które wpisano okręgi, a ich środki połączoną prostą, która przecięła przyprostokątne trójkąta ABC w punktach K i L. Oblicz pole trójkąta KLC.

Zad. 2. W okrąg o_1 o średnicy AB wpisano trapez $ABCD$, a w ten trapez wpisano kolejny okrąg o_2. Pole koła ograniczonego mniejszym okręgiem jest równe 1. Oblicz pole koła ograniczonego większym okręgiem.

Zad. 3. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (mającym kąty proste w wierzchołkach A i D) długości podstaw wynoszą $|AB| = 9$ i $|CD| = 4$. Przez wierzchołki B i C poprowadzono okrąg styczny do ramienia AD. Jaka jest odległość punktu styczności od drugiego ramienia trapezu?

Zad. 4. We wnętrzu kwadratu $ABCD$ obrano punkt K, z którego widać bok AB pod kątem prostym. Półprosta CK przecina bok AB w punkcie E dzielącym go na odcinki o długościach $|AE| = 2$ i $|EB| = 1$. Oblicz pole trójkąta ABK.

Zad. 5. W równoległoboku $ABCD$ obrano na boku CD punkt K i połączono go odcinkiem z wierzchołkiem B, który przeciął przekątną AC w punkcie O. Okazało się, że pole trójkąta OBC wynosi 15, a pole czworokąta $AOKD$ wynosi 31. Oblicz pole równoległoboku.

Zad. 6. Okręgi s_1 i s_2 o środkach odpowiednio w O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B. Półprosta O_1B przecina s_2 w punkcie F, a półprosta O_2B przecina s_1 w punkcie E. Prosta równoległa do EF i przechodząca przez B przecina okręgi s_1 i s_2 odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $|MN| = |AE| + |AF|$.

Zad. 7. Na kolejnych bokach prostokąta: AB, BC, CD i DE obrano odpowiednio punkty K, L, M, N różne od wierzchołków. Wiedząc że $KL \,||\, MN$ oraz $KM \perp LN$, wykaż że punkt przecięcia odcinków KM i LN leży na przekątnej BD.

Zad. 8. Na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O obrano punkt A, a na drugim ramieniu punkty B i C tak, że B leży między O i C. W trójkąt OAB wpisano okrąg o środku O_1, a do trójkąta OAC dopisano okrąg o środku O_2, styczny do boku AC. Wykaż, że jeśli $|AO_1| = |AO_2|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zad. 9. W trapez równoramienny $ABCD$ wpisano okrąg styczny do podstawy AB w punkcie M, do podstawy CD w N, a do ramienia BC w K. Wiedząc, ze prosta BN dzieli odcinek MK na części o długościach 12 i 3, oblicz pole trapezu.

Zad. 10. W trójkącie równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$ i kąt C ma miarę 20°, na boku AC obrano punkt P, a na boku BC punkt R takie, że $|\measuredangle RAB| = 60^\circ$ i $|\measuredangle PBA| = 70^\circ$. Oblicz miarę kąta BPR.

Zad. 11. Przez środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostopadłą do IA przecinającą BC w punkcie M. Niech D jest rzutem prostokątnym I na prostą AM. Wykaż, że punkty A, B, C, D są współokręgowe.

Zad. 12. Przez punkt P leżący na podstawie AB trójkąta równoramiennego ABC poprowadzono proste równoległe do boków AC i BC oraz przecinające je odpowiednio w punktach R i Q. Wykaż, że punkt P' – symetryczny do P względem prostej QR leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.