

XIX MISTRZOSTWA POLSKI W GEOMETRII ELEMENTARNEJ
12 CZERWCA 2021

Zad. 1. Na jednym z ramion kąta ostrego obrano punkty A i B . Znajdź na drugim ramieniu punkt C , z którego odcinek AB widać pod największym kątem.

Zad. 2. Środki wysokości trójkąta ABC leżą na jednej prostej. Najdłuższy bok AB ma długość 10. Jakie jest największe możliwe pole trójkąta?

Zad. 3. Jeden z kątów trójkąta ABC ma miarę 120° . Wykaż, że trójkąt, którego wierzchołkami są spodki dwusiecznych kątów trójkąta ABC , jest prostokątny.

Zad. 4. W trójkącie ABC dwusieczna kąta prostego B przecina przeciwprostokątną w punkcie M . Wiedząc, że odległość M od boku BC wynosi 4, a długość AM wynosi 5, oblicz pole trójkąta ABC .

Zad. 5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste AD i BC przecinają się w punkcie O . Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD , a punkty P i Q – odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Wykaż, że pole trójkąta OPQ stanowi czwartą część pola $ABCD$.

Zad. 6. W trójkącie ostrokątnym odległość środka każdego z boków od przeciwległego wierzchołka jest równa sumie odległości tego środka od pozostałych boków. Wykaż, że ten trójkąt jest równoboczny.

Zad. 7. Środkowe AA' , BB' i CC' trójkąta ABC przedłużono do przecięcia się z okręgiem opisanym na tym trójkącie w punktach odpowiednio X , Y i Z . Wiedząc że M , środek ciężkości trójkąta, dzieli odcinek AX na połowy, wykaż, że trójkąt XYZ jest równoramienny.

Zad. 8. Wykaż, że punkty styczności boku trójkąta z okręgiem wpisanym i z okręgiem dopisanym są symetryczne względem środka tego boku.

Zad. 9. W trójkącie ABC przez punkt D na boku AB poprowadzono prostą równoległą do AC przecinającą bok BC w punkcie E . Przez wierzchołek B i punkt przecięcia odcinków AE i CD poprowadzono prostą przecinającą bok AC w punkcie P . Na odcinku DB obrano punkt Q , taki że $|QB| : |AQ| = |DE| : |AC| = 1/7$. Wiedząc, że pole trójkąta DEB wynosi 8, oblicz pole trójkąta QBP .

Zad. 10. Dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B , a dwusieczna kąta O_1AO_2 przecina te okręgi odpowiednio w punktach C i D . Wykaż, że środek O okręgu opisanego na trójkącie CBD jest równo odległy od O_1 i O_2 .

Zad. 11. W trójkącie poprowadzono proste równoległe do boków (i niezawierające tych boków), styczne do okręgu wpisanego w ten trójkąt. Odcięły one od danego trójkąta trzy nowe trójkąty. Promienie okręgów opisanych na tych trójkątach wynoszą R_a , R_b , i R_c . Oblicz promień okręgu opisanego na wyjściowym trójkącie.

Zad. 12. W trójkącie prostokątnym ABC o przyprostokątnych długości $|AB| = 3$ i $|BC| = 4$ przez środki boków AB i AC poprowadzono okrąg styczny do boku BC . Znajdź długość odcinka przeciwprostokątnej AC zawartego w tym okręgu.

Rozwiązanie zad. n wyślij na adres: ge_zadn@math.uni.wroc.pl

Życzymy powodzenia!