ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

1. Oblicz $\vec{a}\circ\vec{b}$, jeśli:
   a) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, \cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{3}$
   b) $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=5, \cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=-\frac{1}{5}$
   c) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, |\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|=\frac{\pi}{3}$
   d) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4, |\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|=\frac{2\pi}{3}$
   e) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{2}, |\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|=\frac{\pi}{4}$
   f) $|\vec{a}|=3\sqrt{2}, |\vec{b}|=1, |\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|=\frac{3\pi}{4}$
   g) $|\vec{a}|=\frac{1}{4}, |\vec{b}|=\frac{4}{5}, \sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{3}{5}, |\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$
   h) $|\vec{a}|=\frac{1}{3}, |\vec{b}|=\frac{2}{3}, \sin\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{4}{5}, |\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$
2. Oblicz $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, jeśli:

   a) $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=4, \vec{a}\circ\vec{b}=-3$
   b) $|\vec{a}|=2\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{6}, \vec{a}\circ\vec{b}=6\sqrt{2}$
   c) $\vec{a}\circ\vec{b}=-\frac{\sqrt{2}}{3}, \vec{a}\circ\vec{a}=\frac{1}{2}, \vec{b}\circ\vec{b}=\frac{16}{3}$
   d) $\vec{a}\circ\vec{b}=\sqrt{5}, \vec{a}\circ\vec{a}=\frac{5}{3}, \vec{b}\circ\vec{b}=20$

3. W trójkącie równobocznym ABC o boku długości a punkty M, N i P są odpowiednio środkami boków AB, BC oraz AC. Oblicz $\overrightarrow{MN}\circ\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{AN}\circ\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PB}\circ\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CN}\right)$.
4. W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ długość boku wynosi a. Oblicz $\overrightarrow{AE}\circ\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}\circ\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}\circ\overrightarrow{AD}$.
5. Oblicz $\vec{a}\circ\vec{b}$, jeśli:
   a) $\vec{a}=[-2,1], \vec{b}=[3,1]$
   b) $\vec{a}=[3,-2], \vec{b}=[1,-4]$
6. Dane są wektory $\vec{a}=[1,-2], \vec{b}=[-1,1]$ oraz $\vec{c}=[3,2]$. Oblicz:

   a) $\vec{a}\circ\vec{a}+\vec{b}\circ\vec{b}+\vec{c}\circ\vec{c}$
   b) $\vec{a}\circ\left(\vec{b}+2\vec{c}\right)$
   c) $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\circ\vec{c}$
   d) $\left(\vec{a}-2\vec{c}\right)\circ\left(\vec{c}+3\vec{b}\right)$
   e) $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\circ\left(\vec{b}-3\vec{c}\right)$
   f) $\left(2\vec{a}-3\vec{c}\right)\circ\left(4\vec{b}-3\vec{c}\right)$

7. W równoległoboku $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i BC.
   Oblicz $\overrightarrow{AM}\circ\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{DM}\circ\overrightarrow{DN}$, jeśli $A(-3,-2), B(1,-2), C(6,3)$.
8. Oblicz $\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$, jeśli:
   a) $\vec{a}=[1,-1], \vec{b}=[2,1]$
   b) $\vec{a}=[4,2], \vec{b}=[-3,4]$
9. Wyznacz k tak, aby wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ były prostopadłe, jeśli:
   a) $\vec{a}=[2,k+1], \vec{b}=[1-2k,-3]$
   b) $\vec{a}=[3k-4,-1], \vec{b}=[4,2+5k]$
   c) $\vec{a}=[2k,k-3], \vec{b}=[k,1]$
   d) $\vec{a}=[2,4k], \vec{b}=[k,-k]$
10. Wyznacz k tak, aby wektory $\vec{u}=k\cdot\vec{a}+\vec{b}$ oraz $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$ były prostopadłe, jeśli wiadomo, że:
    a) $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, \vec{a}\circ\vec{b}=-4$
    b) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=1, \vec{a}\circ\vec{b}=5$
    c) $|\vec{a}|=2\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{2}, \vec{a}\circ\vec{b}=-\frac{1}{2}$
    d) $|\vec{a}|=\sqrt{5}, |\vec{b}|=2\sqrt{2}, \vec{a}\circ\vec{b}=\frac{1}{3}$
11. Znajdź miarę kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli wiadomo, że $|\vec{b}|=\sqrt{2}\cdot|\vec{a}|$ oraz, że wektory $\vec{u}=2\cdot\vec{a}+\vec{b}$ oraz $\vec{v}=3\cdot\vec{a}-4\cdot\vec{b}$ są prostopadłe.
12. Znajdź miarę kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli wiadomo, że $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ oraz, że wektory $\vec{u}=2\cdot\vec{a}+\vec{b}$ oraz $\vec{v}=5\cdot\vec{a}-4\cdot\vec{b}$ są prostopadłe.
13. Znajdź miarę kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli wiadomo, że wektor $\vec{a}+3\cdot\vec{b}$ jest prostopadły do wektora $7\cdot\vec{a}-5\cdot\vec{b}$ oraz $\vec{a}-4\cdot\vec{b}$ jest prostopadły do wektora $7\cdot\vec{a}-2\cdot\vec{b}$.
14. W trójkącie ABC mamy dane wektory: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ oraz $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, przy czym $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ oraz $|\measuredangle(\vec{a},\vec{b})|=\frac{\pi}{3}$.
    Na bokach AB i AC trójkąta obrano odpowiednio punkty M i N w ten sposób, że $4|AM|=|AB|$ oraz $\frac{7}{2}|AN|=|AC|$. Wykaż, że wektory $\overrightarrow{BN}$ i $\overrightarrow{CM}$ są prostopadłe.