Iloczyn wektorowy oraz jego zastosowania

Mateusz Marecki

March 4, 2024

Abstract

Wstęp teoretyczny: Działania na wektorach w $\mathbf{R}^3$, wyznacznik, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy, równanie płaszczyzny, wektor normalny, rzut wektora na wektor, odległość punktu od płaszczyzny, wzajemne położenie dwóch wektorów, wzajemne położenie dwóch płaszczyzn.

1 Zadanka

1.1) Oblicz następujące iloczyny wektorowe oraz mieszane: **a)** $\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} \circ \left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3\\1\\5\end{bmatrix}\right)$

1.2) Oblicz pole równoległoboku rozpiętego przez wektory: $\begin{bmatrix}2\\5\\1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$

1.3) Znajdź wektor normalny do płaszczyzny rozpiętej poprzez wektory: $\begin{bmatrix}4\\3\\0\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}8\\8\\4\end{bmatrix}$

1.4) Wyznacz wektor normalny płaszczyzny danej wzorem ogólnym: $3x + 5y + 7z = 11$

1.5) Określ wzajemne położenie dwóch prostych, zawartych w następujących wektorach:
a) $\begin{bmatrix}3\\9\\2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}4\\2\\6\end{bmatrix} \begin{bmatrix}6\\3\\9\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1}{2}\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{-\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix}$

1.6) Dany jest czworościan foremny o wierzchołkach w podanych punktach:
$A = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}\frac{-1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{-2}\\0\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{bmatrix}$ **Oblicz pole powierzchni figury powstałej poprzez połączenie środków ciężkości każdej ze ścian. Co to za figura?**

1.7) Wyznacz miarę kąta pomiędzy danymi wektorami:

$$\textbf{a)} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix}4\sqrt{2}\\8\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_7 = \begin{bmatrix}-5\sqrt{2}\\5\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$$

$$\textbf{a)} \quad \mathbf{u}_6 = \begin{bmatrix}11\sqrt{2}\\5\sqrt{2}\\-6\sqrt{2}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-8\sqrt{3}\\-14\sqrt{3}\\10\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

1.8) Wyznacz rzut wektora: $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ **na wektor:** $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

1.9) Wyznacz odległość punktu: $\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$ **od płaszczyzny o równaniu:** $2x - 3y + z + 1 = 0$

1.10) Dany jest graniastosłup pochyły, który w podstawie ma sześciokąt foremny, znamy współrzędne 3 wierzchołków : A = $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ D = $\begin{bmatrix}-7\\0\\0\end{bmatrix}$ oraz A' = $\begin{bmatrix}0\\0\\24\end{bmatrix}$ **wiemy również, że odcinek AA' jest jedyną krawędzią, która jest wysokością tego graniastosłupa.**
Oblicz długość najdłuższej przekątnej tego graniastosłupa.

1.11) Oblicz miarę kąta między płaszczyznami:
a) $2x + 3y + z - 1 = 0$ i $5x - 2y + z - 2 = 0$
b) $-3x + 5y + 4z - 11 = 0$ i $-x + 2y + 5z - 19 = 0$

1.12) Napisz równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt: $\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$
i prostopadłej do wektora: $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

1.13) O wektorach $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ wiadomo, że $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 2$, $|\mathbf{w}| = 1$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ oraz $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\pi}{3}$.
Oblicz $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})$ oraz $(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})$, a następnie wyznacz długość wektora $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ oraz miarę kąta między wektorami $\mathbf{u}$ i $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \\
(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \\
|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}| &= \\
\angle(\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}) &=
\end{aligned}$$

1.14) Dane są wektory: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}8\\9-p\\0\end{bmatrix}$ oraz $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}9\\9+p\\0\end{bmatrix}$ **których wszystkie współrzędne są nieujemne. Oznaczmy przez s_1 sumę wszystkich współrzędnych wektora $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ oraz oznaczmy przez s_2 sumę wszystkich współrzędnych wektora $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$**
Dla jakiej wartości parametru p: NWD(s_1, s_2) = 7?