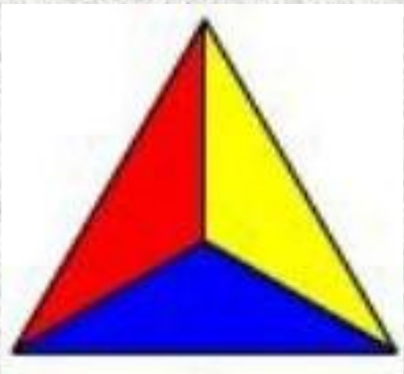
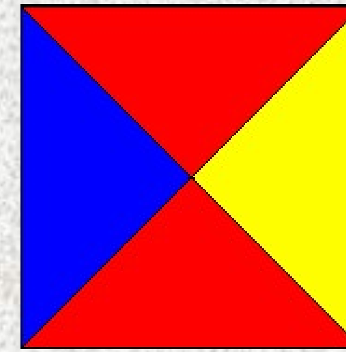


KOLOROWE



układanki

Majora P. A. MacMahona

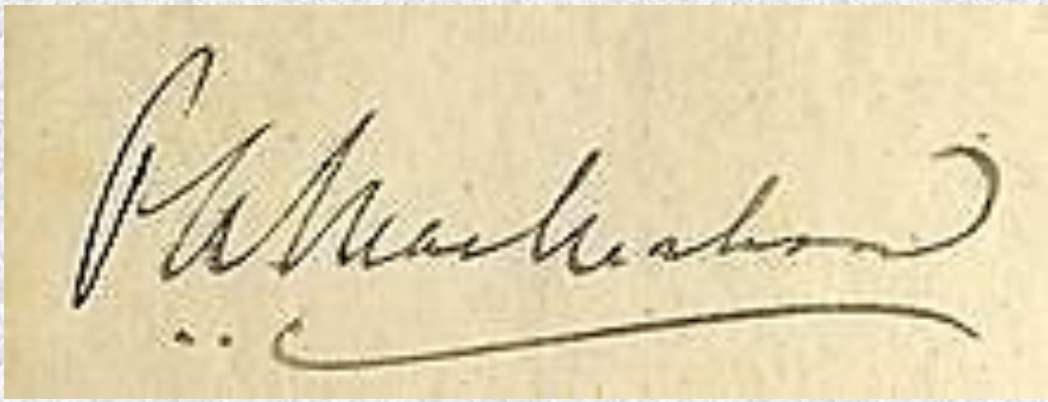
LEWIN KŁODZKI, 16-18 LISTOPADA 2018

Percy Alexander MacMahon
(1854-1929)

- urodzony na Malcie
- syn generała brygady
- Cheltenham College i Królewska Akademia Wojskowa w Woolwich
- od 1873 roku oficer artylerii w Indiach
- 1877 r. zachorował i powrócił do Anglii, co uratowało go przed udziałem w krwawych konfliktach w Afganistanie

• 1880 zapisał się do Advanced Class for Artillery Officers w Woolwich (dwuletni kurs obejmujący przedmioty techniczne i język obcy)
• po ukończeniu kursu awans na stopień kapitana stanowisko instruktora w Królewskiej Akademii Wojskowej
• poznał **Alfreda George'a Greenhilla -** profesora matematyki w Royal Artillery – i zainteresował się teorią niezmienników (m. in. Arthur Cayley)
• 1898 wycofał się z wojska

- 1890 wybrany do **Towarzystwa Królewskiego** w Londynie
- odznaczony: **Royal Medal** 1900, **Sylvester Medal 1**919, **Morgan Medal** 1923
- prezydent **London Mathematical Society** 1894-1896
- gubernator Winchester College
- sekretarz Brytyjskiego Stowarzyszenia na rzecz Postępu Naukowego
- doktoraty honorowe: **Trinity College w Dublinie, Cambridge i Aberdeen**



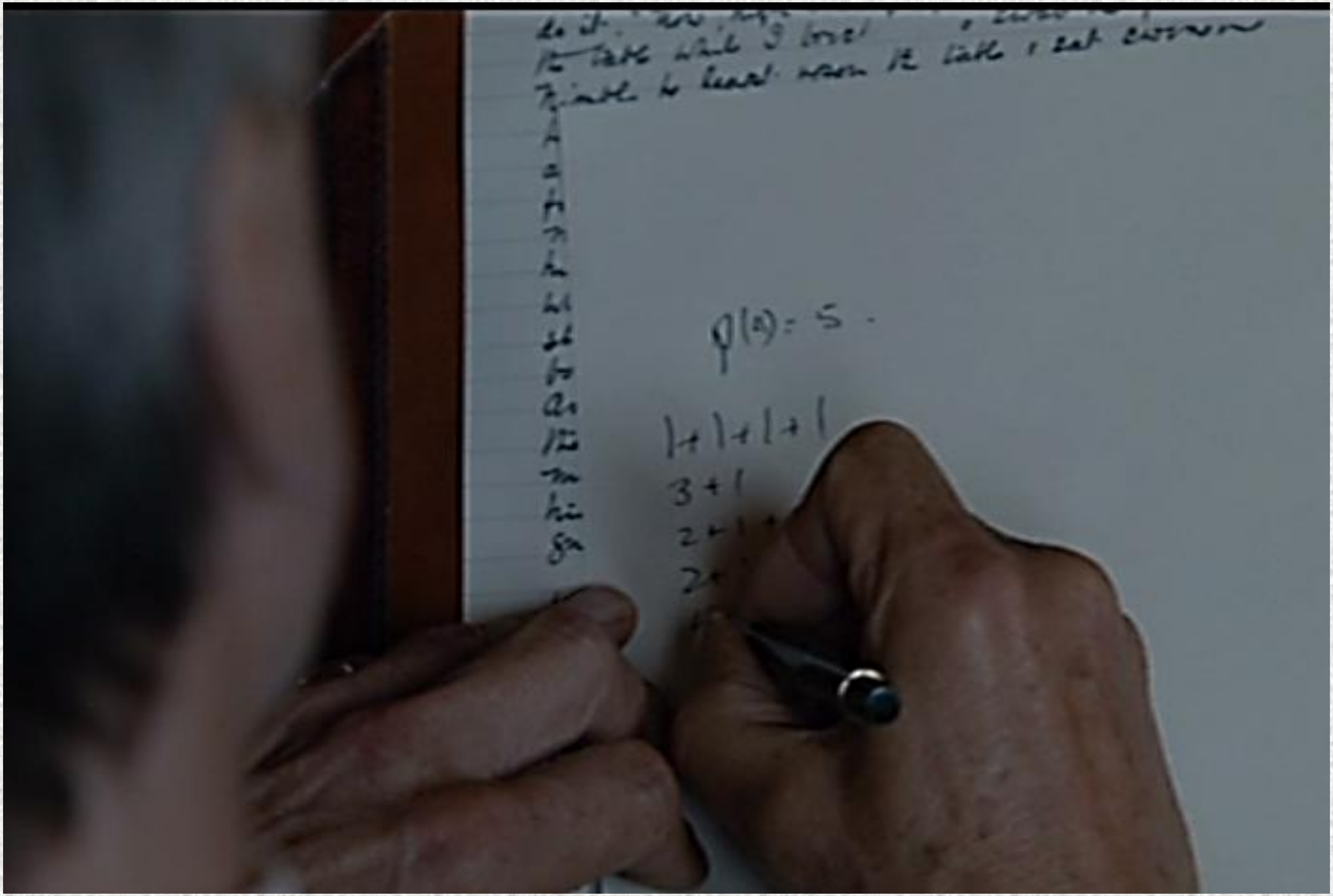
Znany przede wszystkim z prac z **kombinatoryki** (P. A. MacMahon, ***Combinatory analysis***, 2 vols, Cambridge University Press, 1915-16). Pasjonowało go zagadnienie **partycji liczb**.

Badanie **partycji liczby naturalnej** to jedno z najsłynniejszych zagadnień z pogranicza kombinatoryki i teorii liczb. Partycje to wszystkie sposoby przedstawienia tej liczby w postaci sumy składników całkowitych dodatnich (porządek składników nie gra roli, dopuszczamy sumy zawierające tylko jeden składnik).

Na przykład liczba **4** ma pięć partycji:

1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 2 + 2, 1 + 3, 4

Liczbę wszystkich partycji liczby n oznacza się $\boldsymbol{p(n)}$ **i** mamy np. $p(4) = 5$


1+1+1+1
3+1

Nietrudno sprawdzić, że
$\boldsymbol{p}(5) = 7 \quad \boldsymbol{p}(6) = 11$.

Wartości $p(n)$ rosną bardzo szybko,
$\boldsymbol{p}(100) = 190569292$
$\boldsymbol{p}(1000) =$
24061467864032622473692149727991

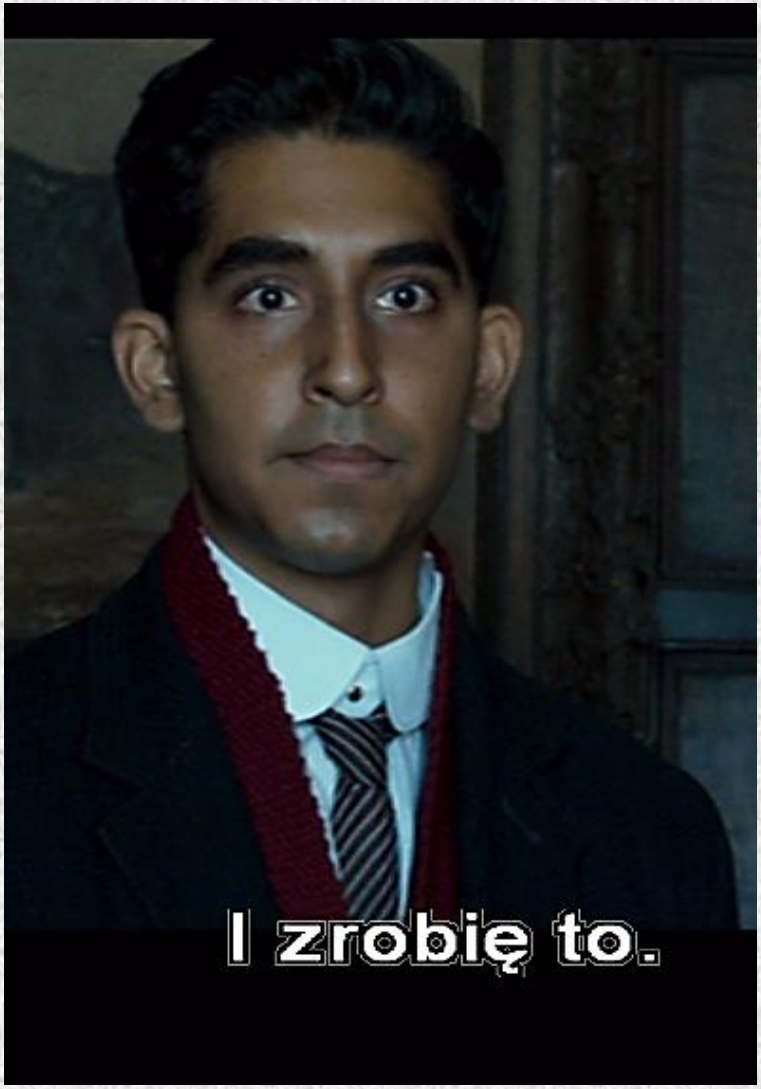
Nie ma prostego wzoru, który pozwalałby wyznaczyć $p(n)$.
To utrudnia życie również fizykom cząstek elementarnych.


Majorze MacMahon - przedstawiam
panu Ramanujana.


Nie udało się wam z liczbami pierwszymi,
to wzięliście się za podziały?


Na to nie można znaleźć wzoru.
Nie uda ci się.


Można.


I zrobię to.


Nie, ja to zrobię.

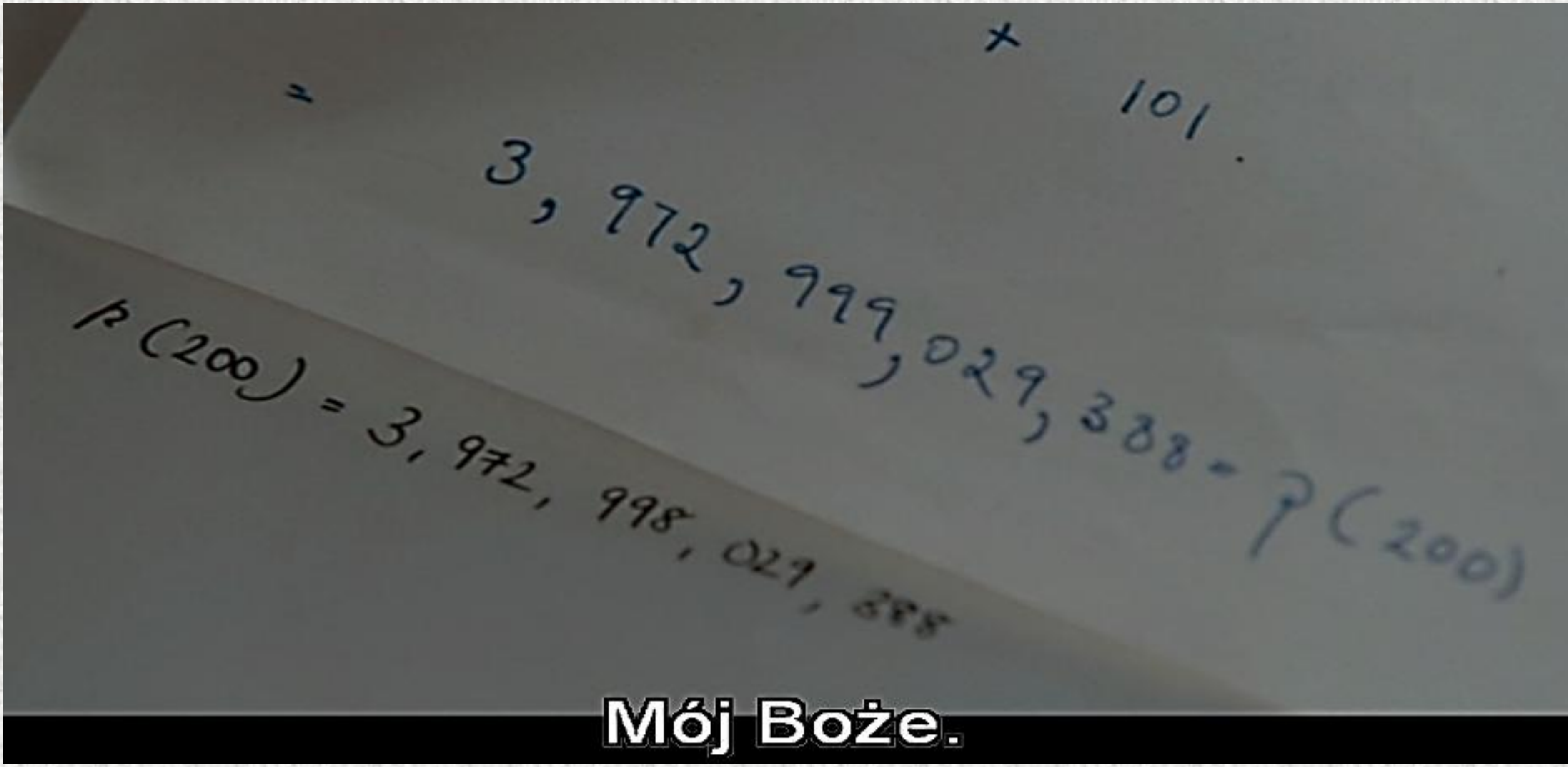

Policzę to ręcznie.
Powoli i mozolnie dodając.


Wtedy przekonacie się,
że wasz wzór jest błędny.

Srinivasa Aiyangar Ramanujan odkrył między innymi następujące zależności:

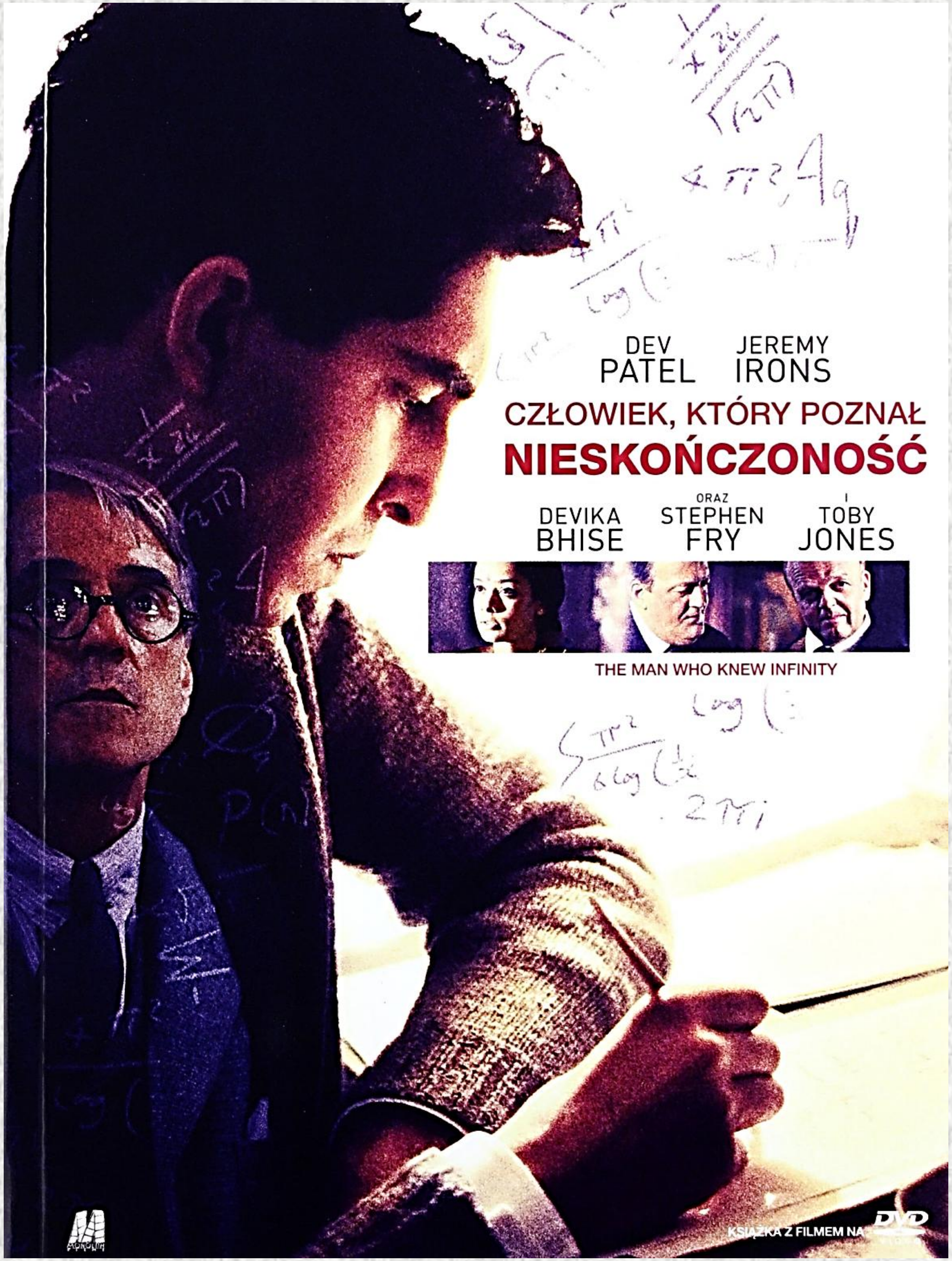
$$\boldsymbol{p(5k+4) \equiv 0 \pmod{5}}$$
$$\boldsymbol{p(7k+5) \equiv 0 \pmod{7}}$$
$$\boldsymbol{p(11k+6) \equiv 0 \pmod{11}}$$

Zauważył to, oglądając tablicę wartości p(n) dla n mniejszych od 200. Potem zaś udowodnił, że to ogólna prawidłowość, a nie tylko dziwny przypadek.


× 101.
3,972,999,029,388 = p(200)
p(200) = 3,972,998,029,388
Mój Boże.


A niech mnie.


To największy geniusz, jakiego spotkałem
w życiu. I nazywa się Ramanujan.

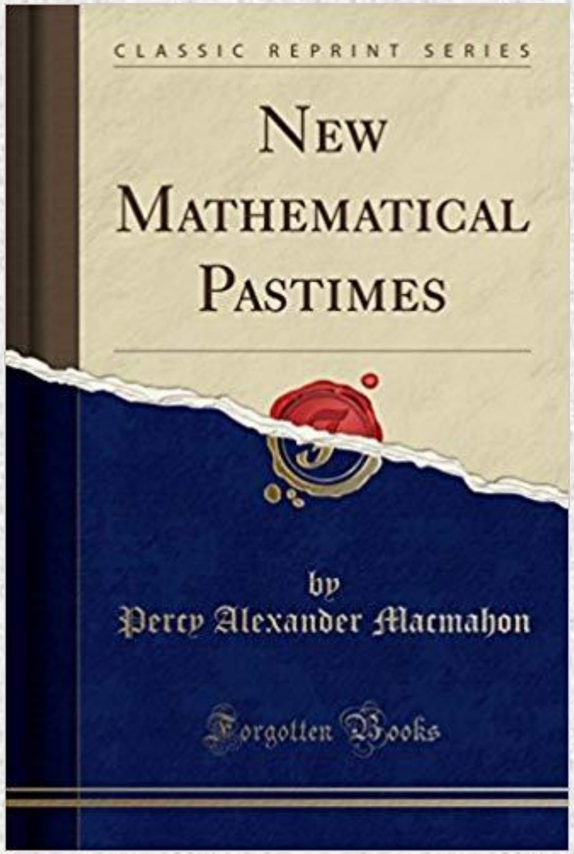

DEV
PATEL
JEREMY
IRONS
CZŁOWIEK, KTÓRY POZNAŁ
NIESKOŃCZONOŚĆ
DEVIKA
BHISE
ORAZ
STEPHEN
FRY
I
TOBY
JONES
THE MAN WHO KNEW INFINITY
KSIĄŻKA Z FILMEM NA DVD


Narayana Iyer Dhritiman Chaterji
Sir Francis Spring Stephen Fry
Komalatammal Arundhati Nag
Janaki Devika Bhise
Beglan Pádraic Delaney
Littlewood Toby Jones
Bertrand Russell Jeremy Northam
Dr. Muthu San Shella
Hobson Richard Cunningham
Baker Thomas Bewley
Howard Anthony Calf
Vice Master Henry Jackson Richard Johnson
Major MacMahon Kevin R. McNally
Student Pip Barclay
Porter David Shaw-Parker
Waiter Dominic Cazenove
Chandra Mahalanobis Shazad Latif
Andrew Hartley Nicholas Agnew
Scribe Roger Narayan
Grocer Alan Booty
Postal Worker Shenagh Govan
Cadet Alexander Forsyth
Doctor Enzo Cilenti
Hospital Nurse Elaine Caulfield
Hospital Doctor Alex Bartram
J. J. Thompson Christopher Ravenscroft

Gian-Carlo Rota (amerykański matematyk i filozof) we wstępie do I tomu dzieł zebranych MacMahona

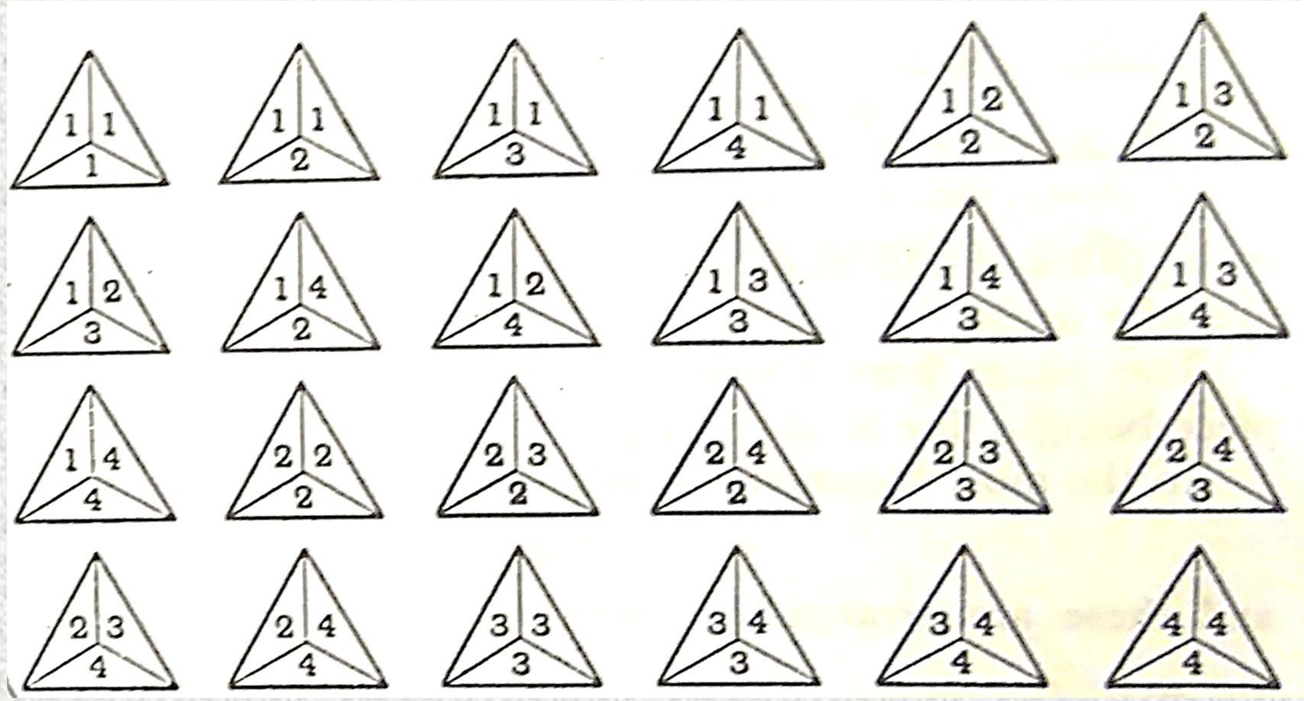
„It would have been fascinating to be present at one of the battles of arithmetical wits at Trinity College, when MacMahon would regularly trounce Ramanujan by the display of superior ability for fast mental calculation”

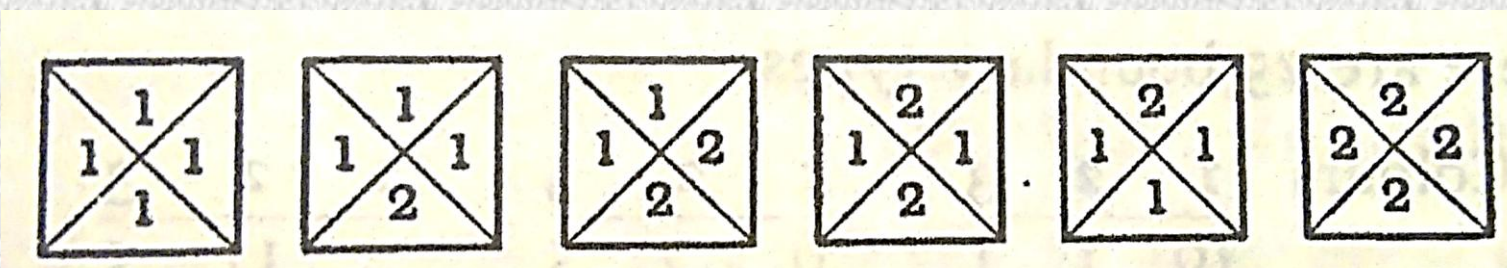
Percy Alexander MacMahon
autor artykułów dotyczących matematyki rekreacyjnej oraz książki z rozrywkami matematycznymi, Cambridge 1921



W książce tej rozważa między innymi układanki powstałe na bazie wielokątów foremnych, podzielonych na przystające części odcinkami łączącymi wierzchołki odpowiedniego wielokąta ze środkiem okręgu opisanego na nim. Powstałe w ten sposób części wielokątów kolorujemy n **kolorami**, otrzymując zestawy kolorowych „klocków", „płytek" (lub „kamieni" – w nawiązaniu do kamieni domina)

„kolory” są zastąpione zostały liczbami





MacMahon podaje wzory na liczby kamieni w zestawie, w zależności od liczby boków wielokąta foremnego oraz liczby dopuszczalnych kolorów.

Odwołuje się do podręcznika **Eugene Netto, „Lehrbuch der Combinatorik”** (Leipzig, Verlag von B.G.Teubner, 1901)

Jeśli użyjemy n **kolorów**, to otrzymamy układanki składające się odpowiednio z

$$\frac{1}{3}n(n^2+2)$$

kamieni w przypadku **trójkąta**,

$$\frac{1}{4}n(n+1)(n^2-n+2)$$

kamieni w przypadku **kwadratu**,

$$\frac{1}{5}n(n^4+4)$$

kamieni w przypadku **pięciokąta**,

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n^4-n^3+n^2+2)$$

kamieni w przypadku **sześciokąta**,

$$\frac{1}{7}n(n^6+6)$$

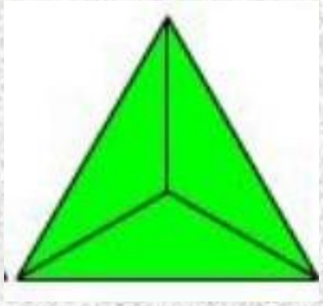
kamieni w przypadku **siedmiokąta**.

Jak pisze MacMahon: znający się na matematyce czytelnik z pewnością zauważy, że jeśli wielokąt ma p boków, gdzie p jest liczbą pierwszą, to liczba kamieni w układance wynosi

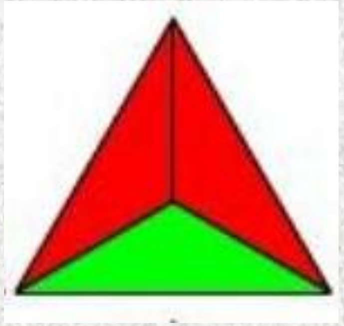
$$\frac{1}{p}n(n^{p-1}+p-1)$$

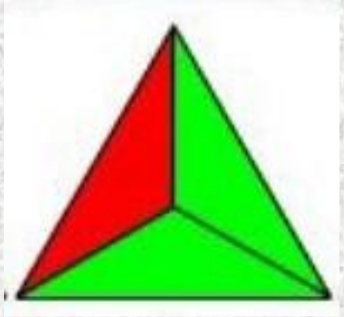
Nie odwołując się do żadnych podręczników, można wzory podane przez MacMahona wyprowadzić „na piechotę”.

Na przykład rozważając kamienie trójkątne i używając n kolorów otrzymujemy:

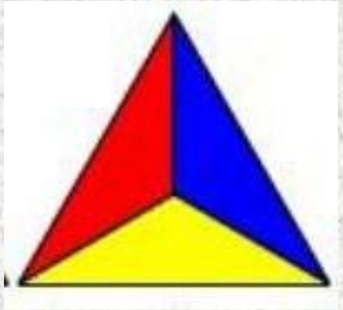


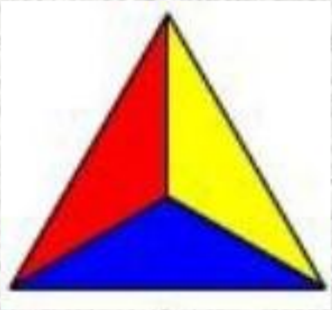
n kamieni jednokolorowych





$2 \cdot \binom{n}{2}$ kamieni dwukolorowych





$2 \cdot \binom{n}{3}$ kamieni trzykolorowych

Zliczając wszystkie trójkątne kamienie otrzymujemy więc:

$$n + 2 \cdot \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{3}$$
$$= n + 2 \cdot \frac{n!}{2!\,(n-2)!} + 2 \cdot \frac{n!}{3!\,(n-3)!}$$
$$= n + (n-1)n + \frac{(n-2)(n-1)n}{3}$$
$$= \frac{3n + 3(n-1)n + (n-2)(n-1)n}{3}$$
$$= \frac{\boldsymbol{n(n^2+2)}}{\boldsymbol{3}}.$$

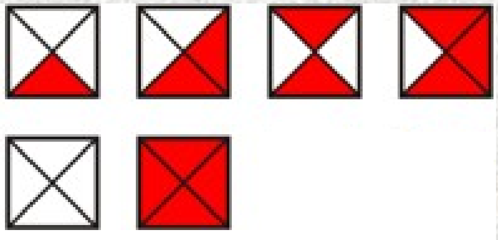
Jeden z rozdziałów, pod tytułem **„SQUARE PASTIMES"**, poświęcony jest w całości układance powstałej na bazie **KWADRATU**, podzielonego przekątnymi na cztery części, które są odpowiednio pokolorowane z użyciem $\boldsymbol{n}$ kolorów.

Ze wzoru $\frac{1}{4}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+1)(\boldsymbol{n}^2-\boldsymbol{n}+2)$ wynika, że dla kolejnych $\boldsymbol{n}$ otrzymujemy

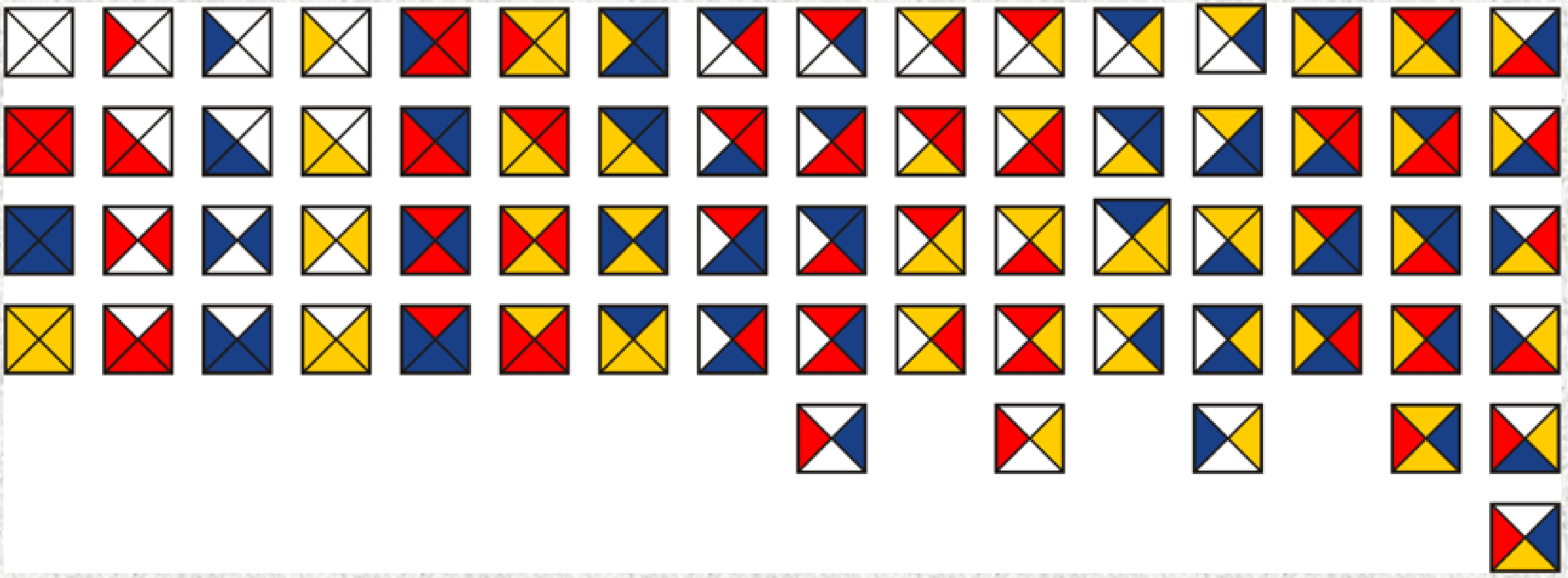
1, 6, 24, 70, 165, 336…

kwadratowych kamieni w komplecie.

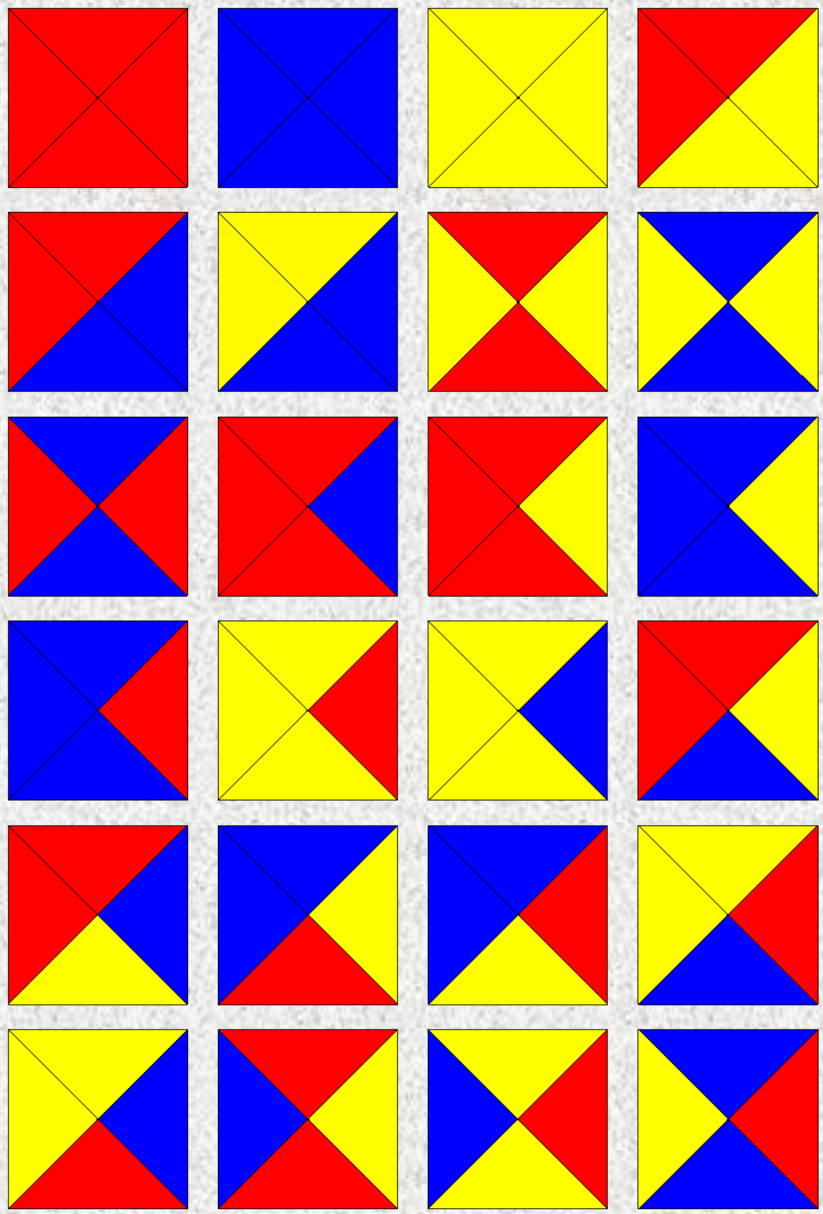
układanka z 6 kamieni
mało ciekawa



70 kamieni - to zdecydowanie za dużo…



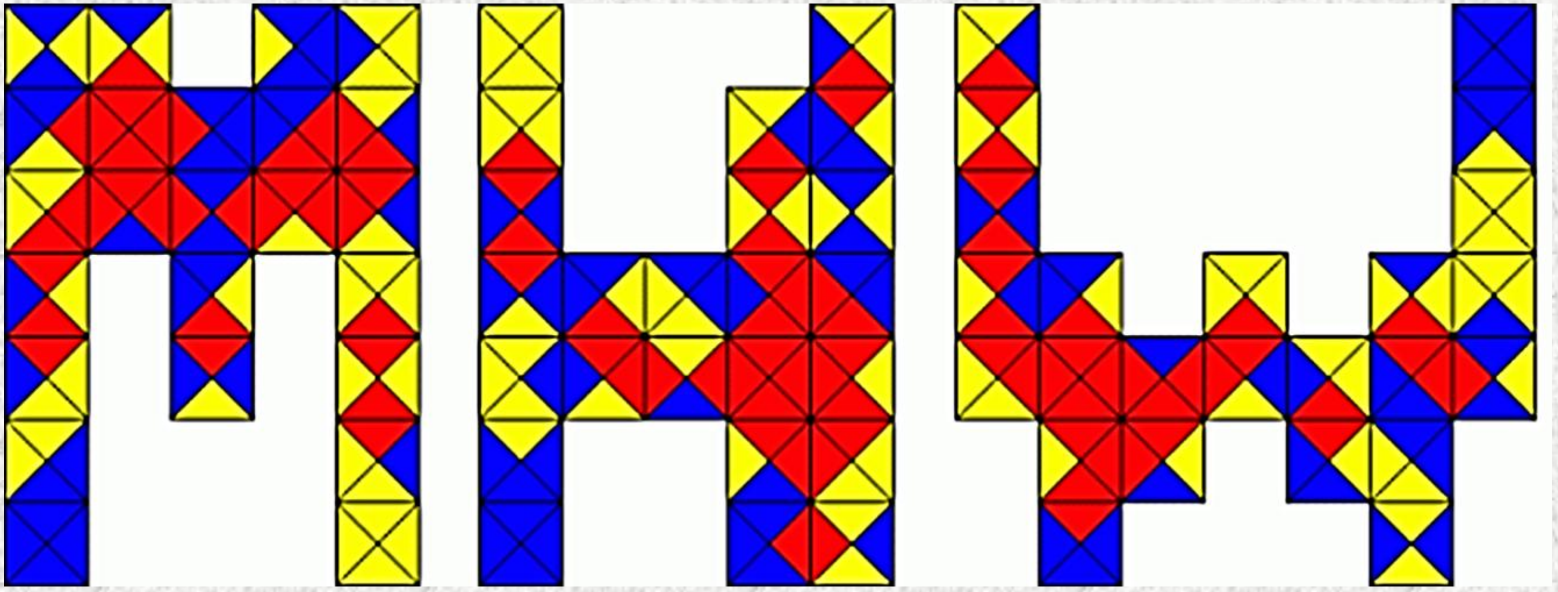
...i pewnie dlatego MacMahon wybrał wersję **z trzema kolorami** i tym samym z 24 kamieniami. Niektóre z kwadratów są **jednokolorowe** (jest ich 3), niektóre **dwukolorowe** (jest ich 12), a niektóre **trzykolorowe** (jest ich 9).



MacMahon rozważa różne sposoby zestawiania ze sobą kamieni:

- system $C_{1,1,1}$ oznacza, że stykają się ze sobą boki jednakowego koloru, tzn. **1 z 1, 2 z 2, 3 z 3**,
- system $C_{1,2}$ oznacza, że boki stykają się ze sobą według zasady: **1 z 1, 2 z 3**,
- system $C_{2,1}$ oznacza, że boki stykają się ze sobą według zasady: **1 z 2, 3 z 3**.

W każdym z tych systemów można wyłożyć wszystkie kamienie, budując wieloboki o przeróżnych kształtach.



Przykład: wieloboki zbudowane w systemie $C_{1,1,1}$

MacMahon proponuje jednak układanie nie dowolnych wieloboków, ale **kwadratów o wymiarach 6 x 4**.

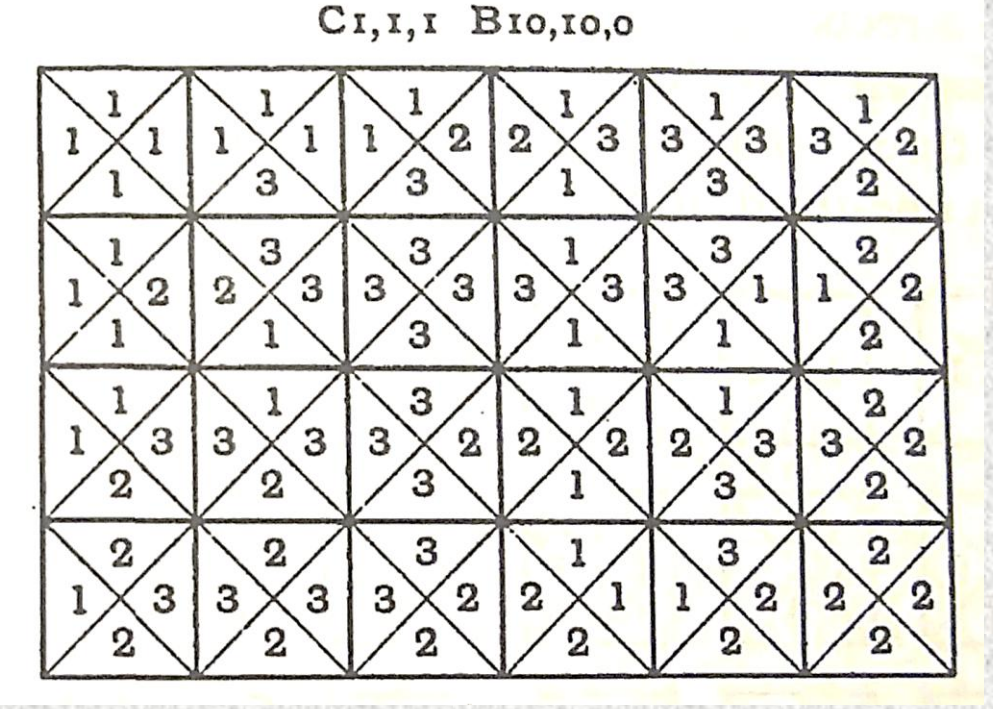
Przy 24 kwadratach mamy 24 x 4 = 96 części, co nam daje 96 : 3 = 32 części w każdym z trzech użytych kolorów. Ponieważ 32 jest liczbą parzystą, a prostokąt 6 x 4 ma 20 „części brzegowych”, więc w systemie $C_{1,1,1}$ każdy z trzech kolorów musi się pojawić na brzegu parzystą liczbę razy.

MacMahon rozważa więc w systemie $C_{1,1,1}$ 14 typów brzegów:

OZNACZENIE	KOLOR 1	KOLOR 2	KOLOR 3
$B_{20,0,0}$	20	0	0
$B_{18,2,0}$	18	2	0
$B_{16,4,0}$	16	4	0
$B_{16,2,2}$	16	2	2
$B_{14,6,0}$	14	6	0
$B_{14,4,2}$	14	4	2
$B_{12,8,0}$	12	8	0
$B_{12,6,2}$	12	6	2
$B_{12,4,4}$	12	4	4
$B_{10,10,0}$	10	10	0
$B_{10,8,2}$	10	8	2
$B_{10,6,4}$	10	6	4
$B_{8,8,4}$	8	8	4
$B_{8,6,6}$	8	6	6

Prostokąty o brzegach w każdym z tych typów są możliwe do ułożenia, choć nie wszystkie są równie łatwe.

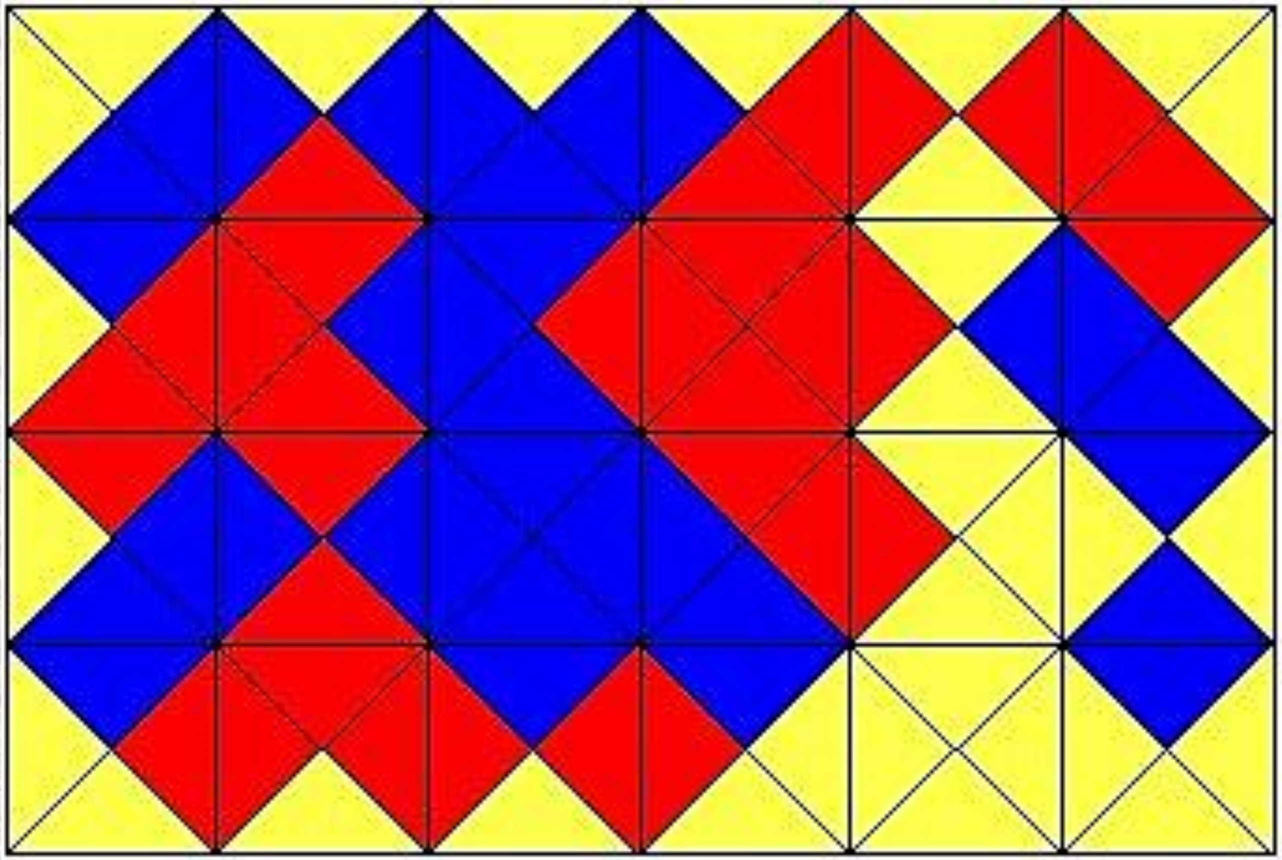
Jako przykład MacMahon podaje prostokąt o brzegu typu $\boldsymbol{B}_{\mathbf{10,10,0}}$.



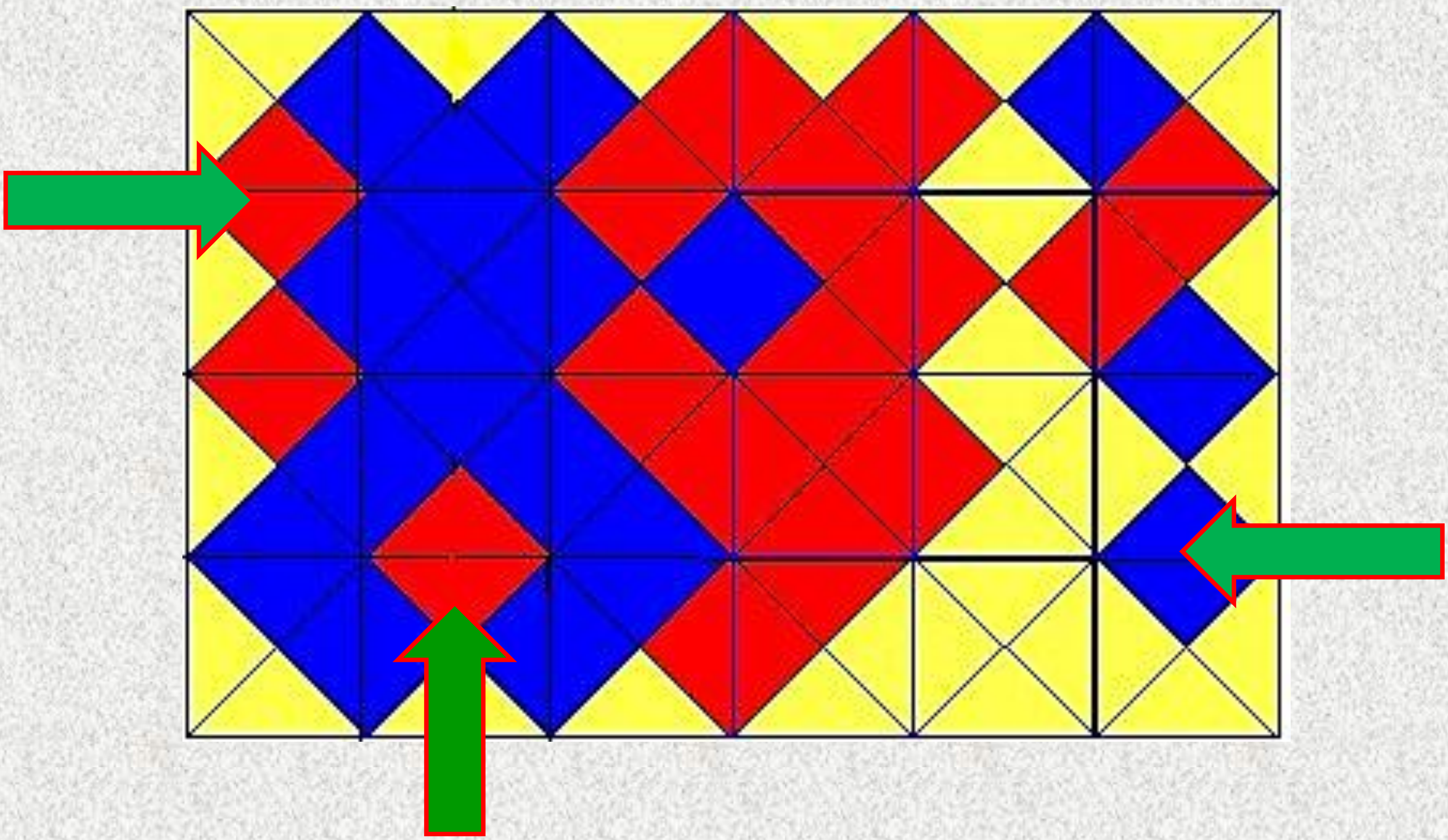
MacMahon twierdzi, że czytelnik nie powinien mieć problemów z ułożeniem prostokąta z brzegiem typu $\boldsymbol{B}_{\mathbf{20,0,0}}$, czyli jednokolorowym, ale będzie to na pewno wymagać namysłu oraz sprytu i pomysłowości!

Takich prostokątów o całkiem różnych trzykolorowych wzorach jest aż **13 328**, ale wcale niełatwo ułożyć którykolwiek z nich!

Przy układaniu powstają małe jednokolorowe kwadraty, obrócone o 45 stopni w stosunku do wykładanych, zwane są one **diamentami**.



Diamenty, które są otoczone odmiennymi kolorami, to **diamenty-enklawy**.

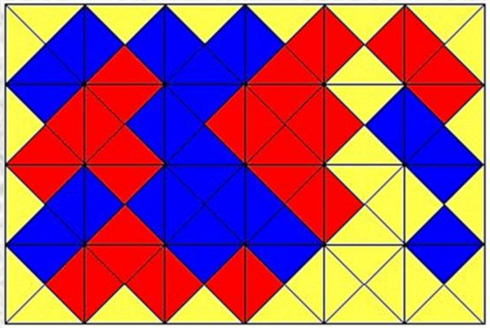


PROBLEMY

Ile diamentów może być w zapełnionym prostokącie 4 x 6?

Czy zawsze tyle samo?

W zapełnionym prostokącie z jednokolorowym brzegiem jest zawsze 38 diamentów, po 16 w dwóch kolorach oraz 6 w trzecim (brzegowym).

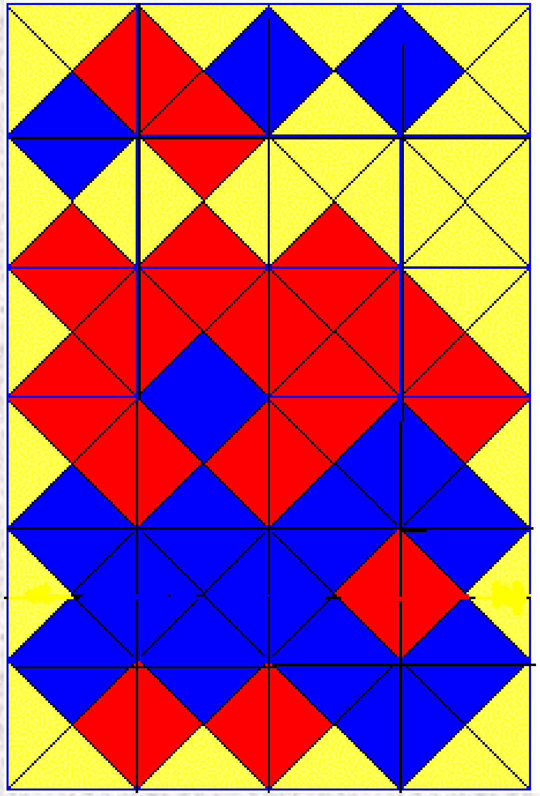


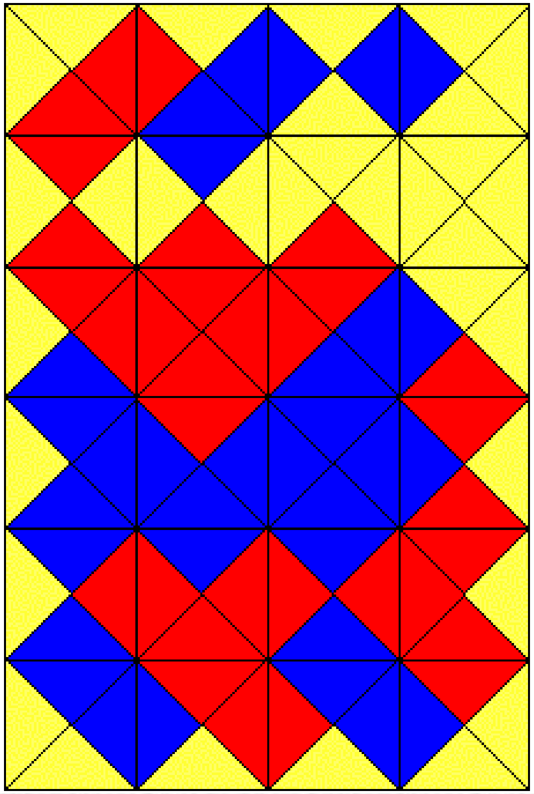
Czy diamentowe konfiguracje mogą być symetryczne?

W żadnym z 13 328 różnych układów rozmieszczenie kolorów nie jest symetryczne!

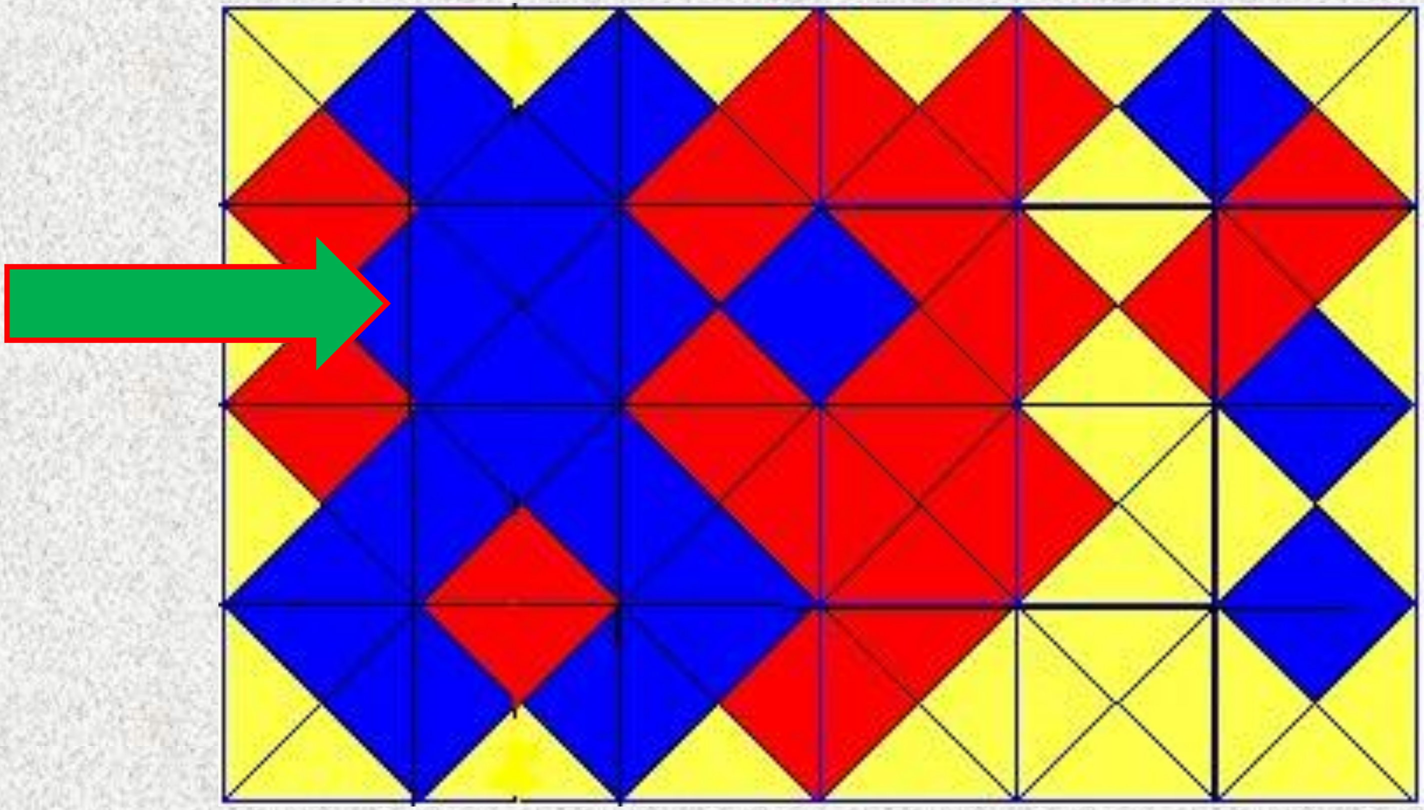
Jak duże
mogą być
jednobarwne wieloboki
złożone z diamentów?

Jednobarwne wieloboki, które pojawiają się w zapełnionych prostokątach, złożone są z co najwyżej 12 diamentów.



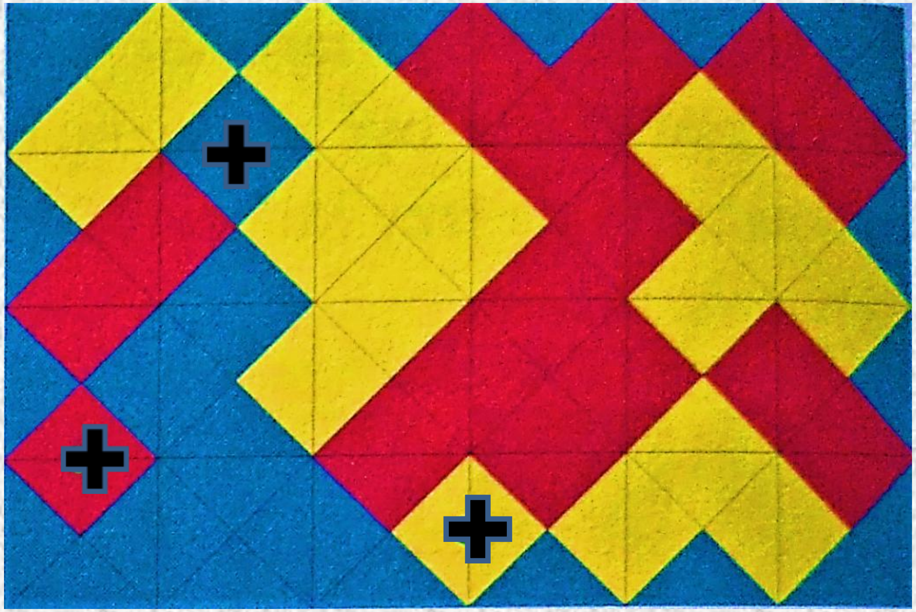


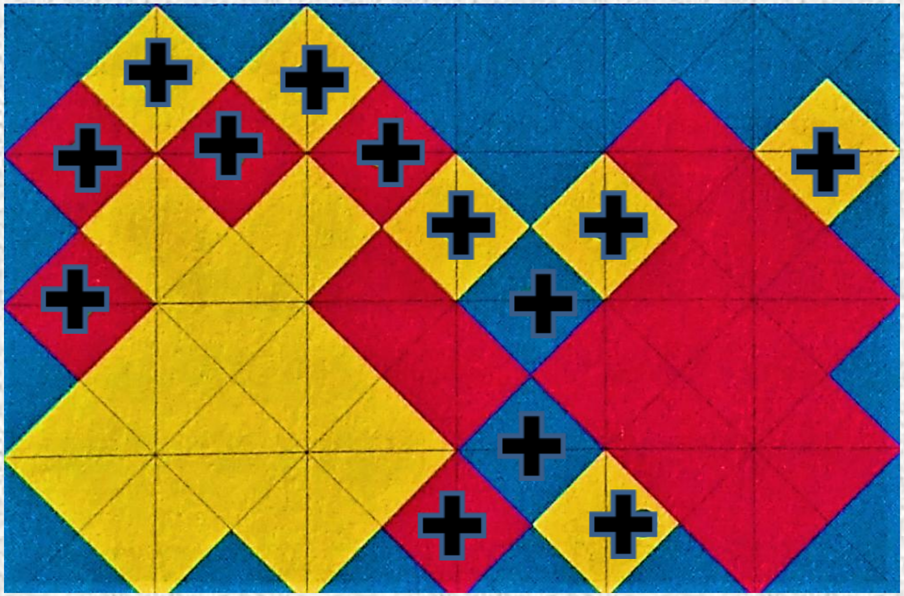
Tylko nieliczne z tych „ekstremalnych” wieloboków są symetryczne!



Jaka może być liczba diamentów-enklaw (otoczonych odmiennymi kolorami)?

Liczba pojedynczych diamentów-enklaw, czyli otoczonych odmiennymi kolorami, nie może być mniejsza niż 3 i większa niż 13.





Na bazie kwadratów MacMahona amerykański inżynier i matematyk **Wade Edward Philpott** **(1918-1985)** stworzył układankę **Multimatch I**.

Był pionierem w wykorzystywaniu programów komputerowych do znajdowania prostokątów 6 x 4 o jednokolorowym brzegu, badał również symetryczne kształty, które mogą się pojawiać w takich prostokątach.

W. E. Philpott współpracował z **KADRON ENTERPRISES**, która w 1982 rozpoczęła masową produkcję tekturowej wersji układanki Multimatch I, w 1989 zastąpiono ją wersją akrylową.

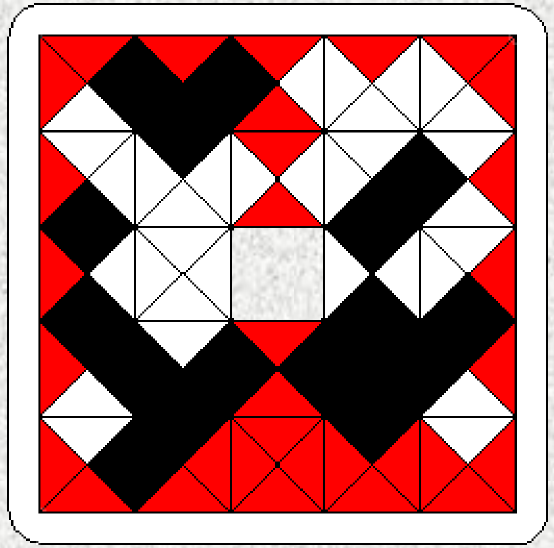
Układanka była sprzedawana wraz z książką, która opisywała 30 lat badań W. E. Philpotta nad trzykolorowymi kwadratami MacMahona oraz zawierała zasady kilku **gier**, opartych na zestawie tych kwadratów.


MULTIMATCH™
FROM KADON
Tricolor Monominoes
A fascinating puzzle/game
MULTIMATCH™
MULTIMATCH™
24 Tricolor Monominoes


Multimatch® I
Game Rules
Puzzle Designs
Multimatch I™

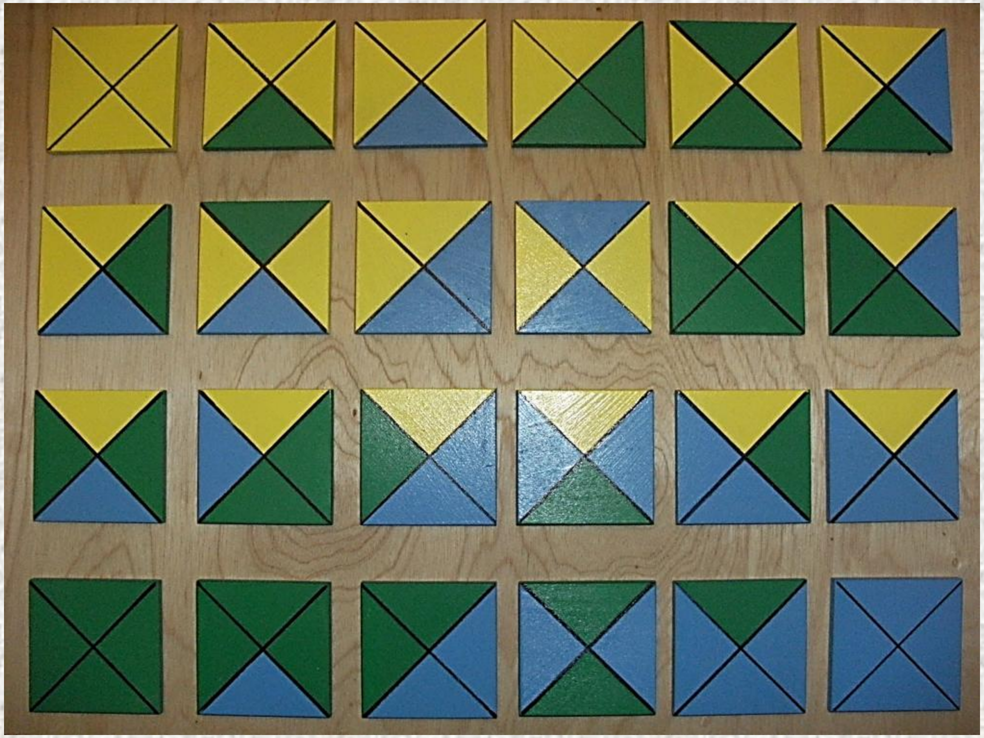
PRZYKŁADOWA GRA

Dwaj gracze po kolei umieszczają kamienie na planszy 5x5. Krawędzie muszą się zgadzać, a pierwszy kamień umieszczony na krawędzi planszy określa kolor tej krawędzi.
Gracz wykładający na planszę ostatni kamień – wygrywa.



Układankę uczniowie mogą zrobić samodzielnie,
drukując na
grubym papierze
i wycinając…

…lub pomalować drewniane płytki (wersja znacznie trwalsza ale i pracochłonna)



Kwadraty MacMahona służą jednak nie tylko do zabawy!

W 1900 roku **David Hilbert** zaprezentował 23 fundamentalne problemy matematyczne. Jedną z części 18. problemu można sformułować w postaci pytania: czy istnieje wielobok pokrywający nieskończoną płaszczyznę **tylko w sposób nieokresowy**?

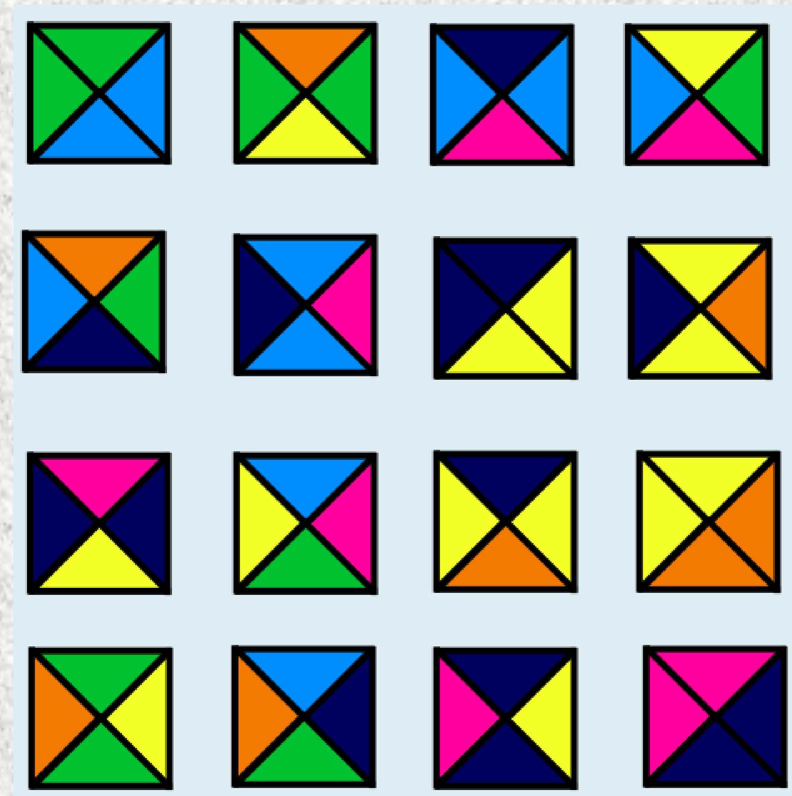
W 1961 roku **Hao Wang** (amerykański logik, filozof i matematyk poch. chińskiego) rozważał kwadratowe domina (czyli **kwadraty MacMahona**) i postawił hipotezę, że każdy skończony zestaw kamieni domina pokrywający płaszczyznę może pokryć ją także w sposób okresowy.

Pierwszy kontrprzykład pojawił się w **1996** roku i jest autorstwa **Roberta Bergera** (studenta Hao Wanga).

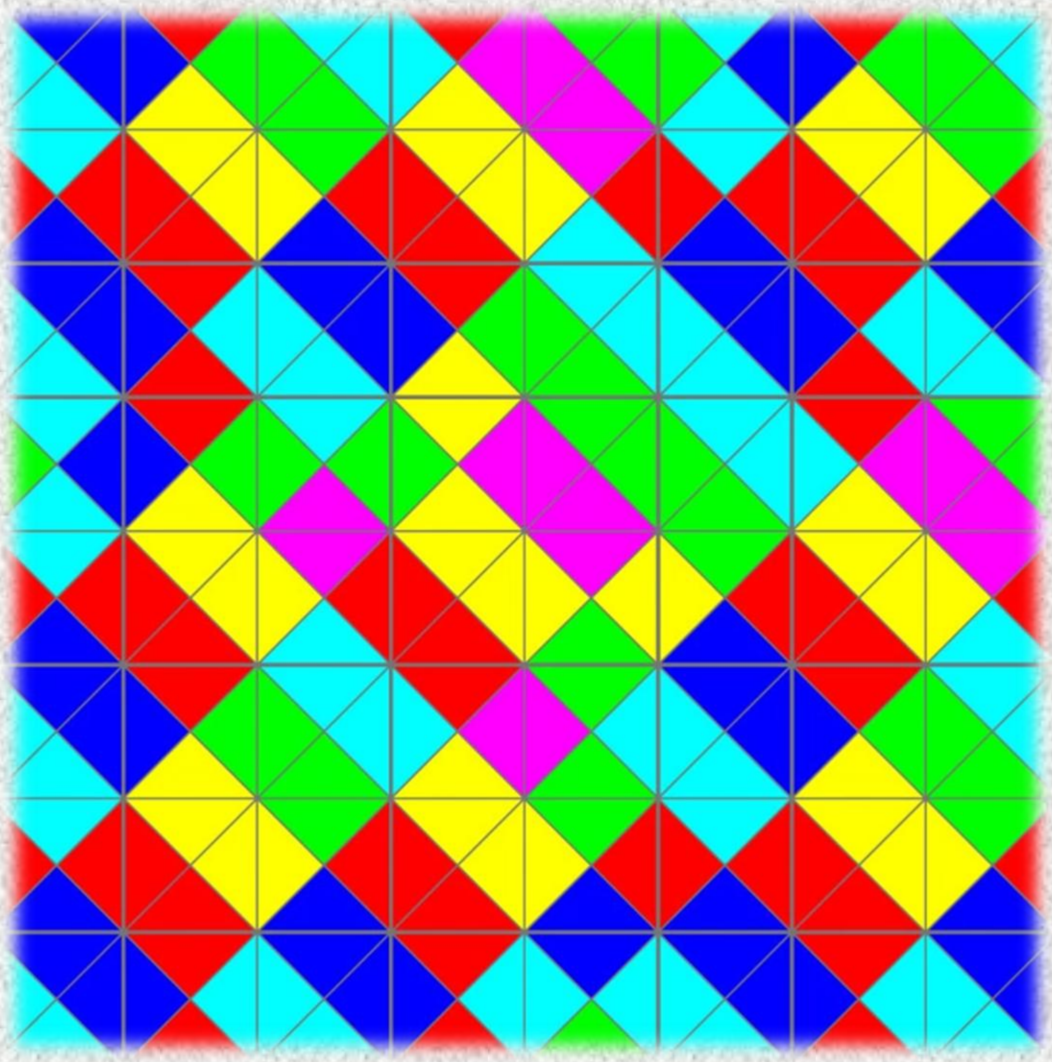
Zaprojektował on **20 426** kamieni pokrywających płaszczyznę tylko w sposób nieokresowy. Wkrótce udało mu się zredukować liczbę kamieni do **104**.

Kolejne kontrprzykłady
(z coraz mniejszą liczbą kamieni):
1977 - Robert Amman
(matematyk amator, programista)

16 kamieni w 6 kolorach

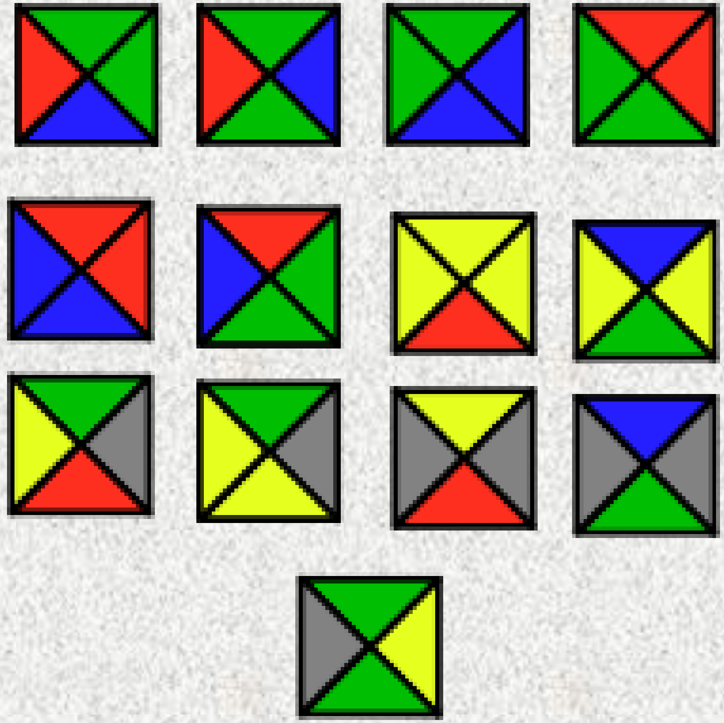


Nieokresowe pokrycie płaszczyzny kamieniami Roberta Ammana



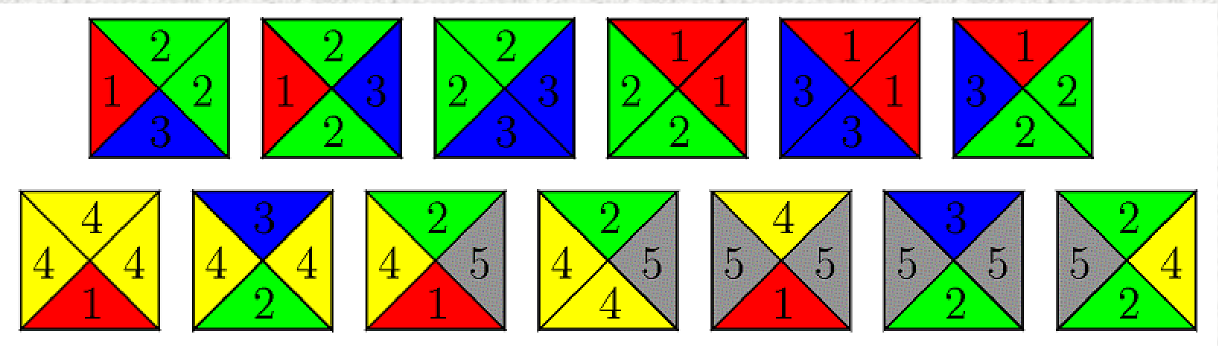
1996 - Jarkko Kari
(fiński matematyk i informatyk)

14 kamieni w 6 kolorach

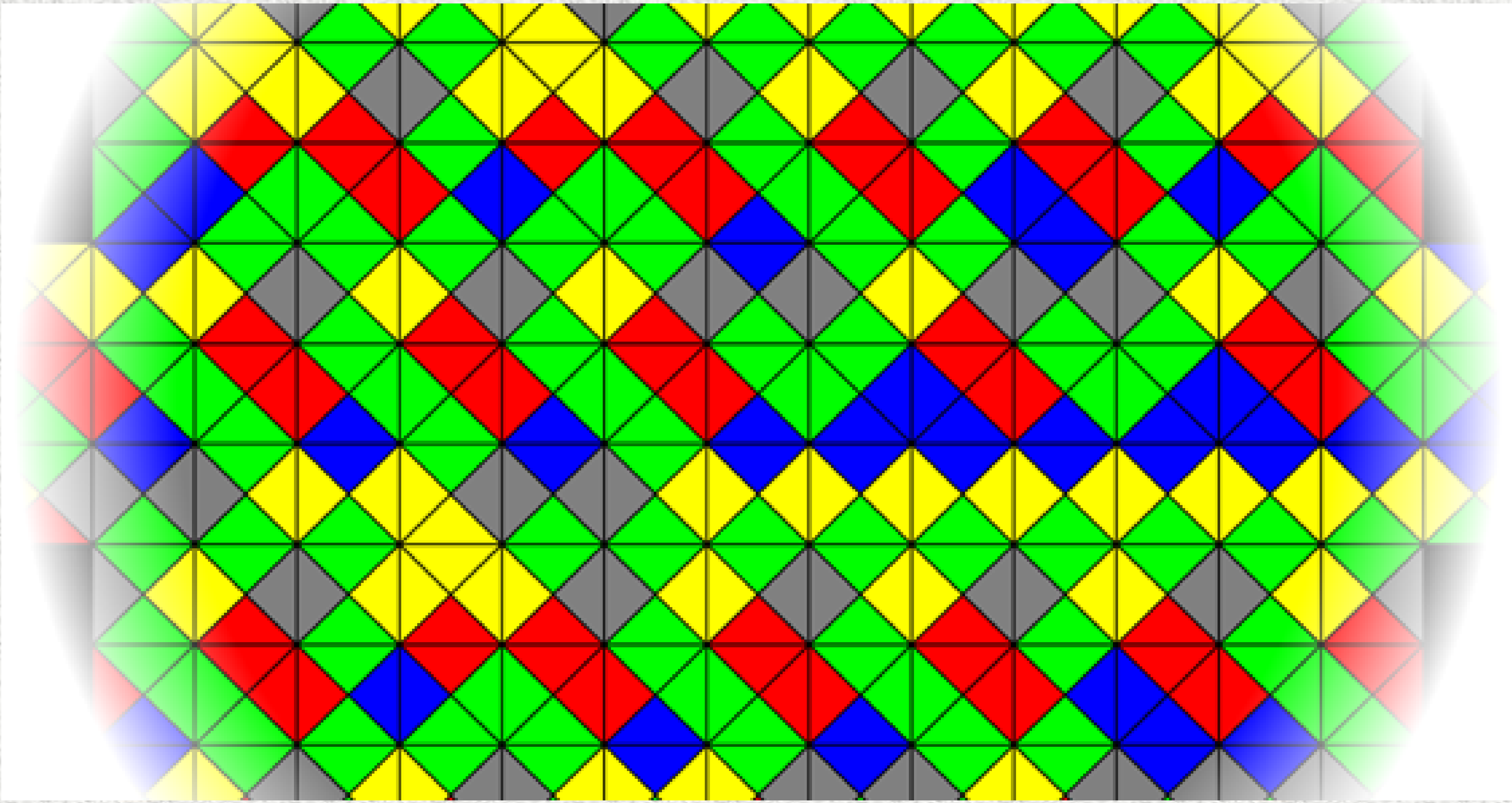


1996 - Karel Culik II
(amerykański matematyk poch. czeskiego)

13 kamieni w 5 kolorach

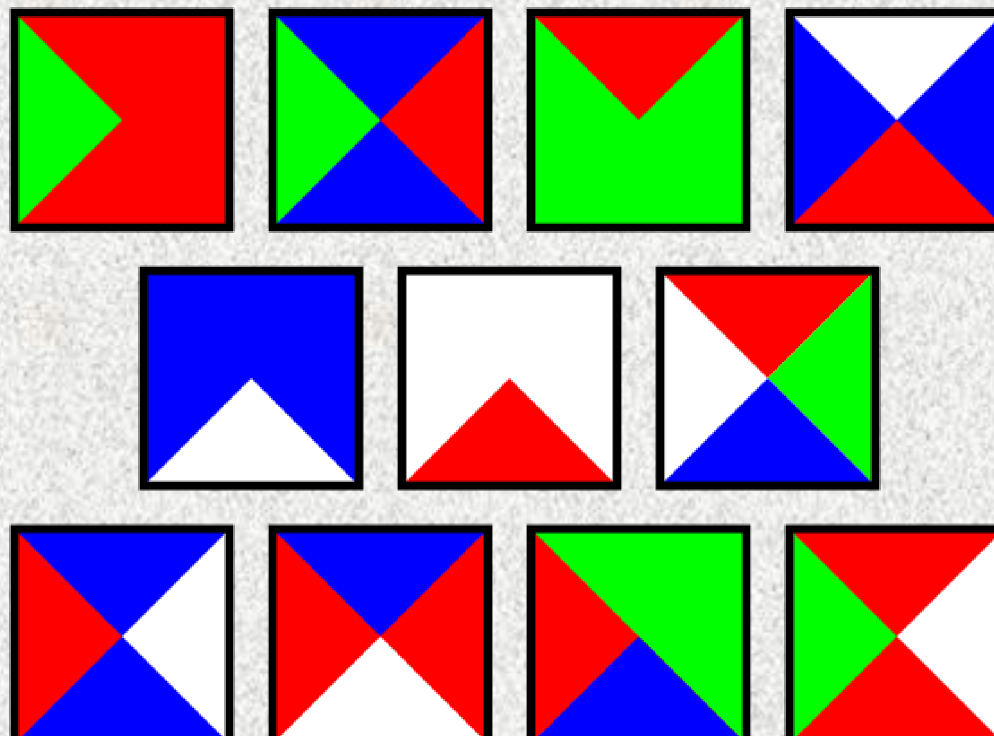


Nieokresowe pokrycie płaszczyzny kamieniami Karela Culika II

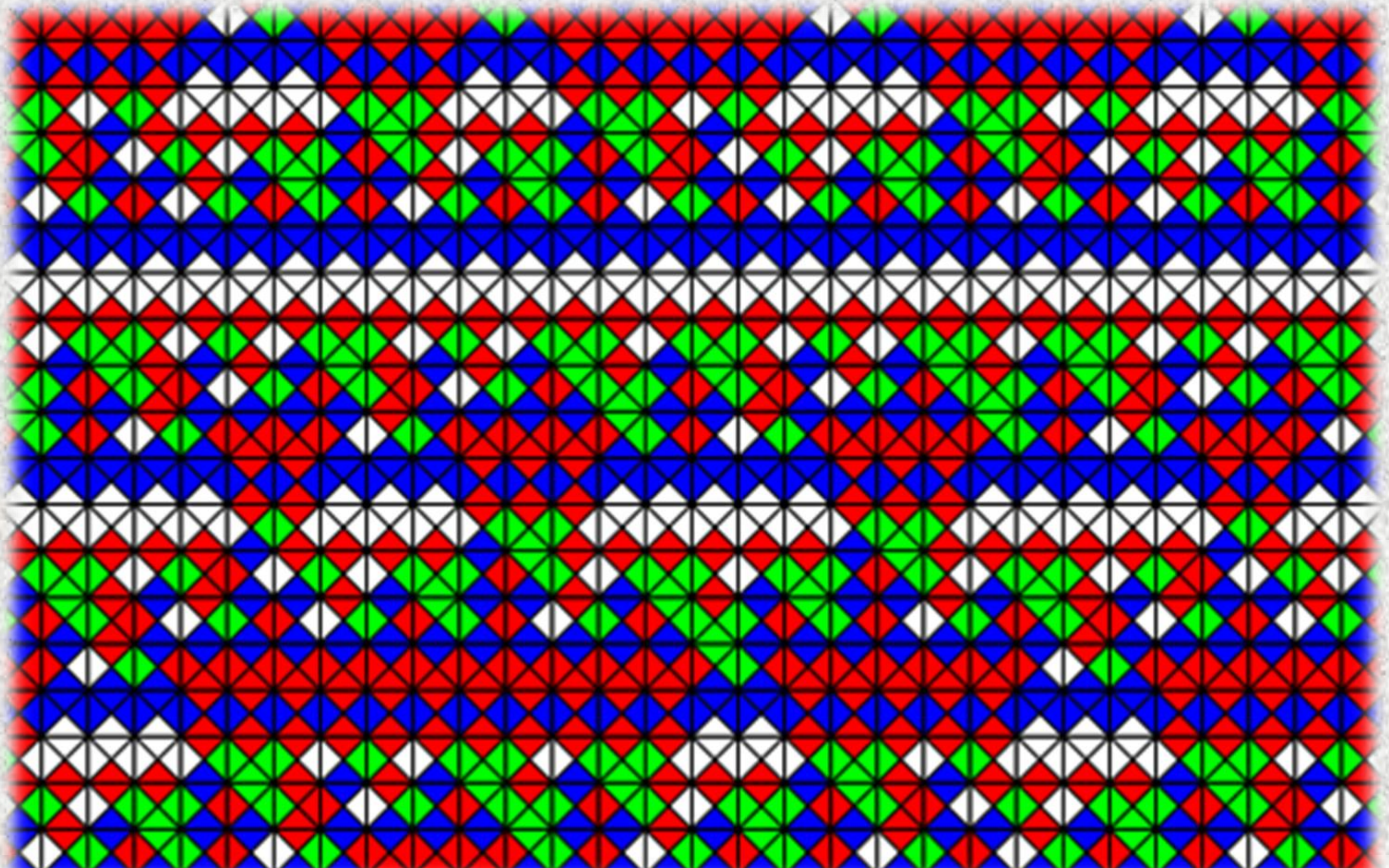


2015 - Emmanuel Jeandel, Michaël Rao
(francuscy matematyk i informatyk)

11 kamieni w 4 kolorach



Nieokresowe pokrycie płaszczyzny kamieniami Jeandela i Rao

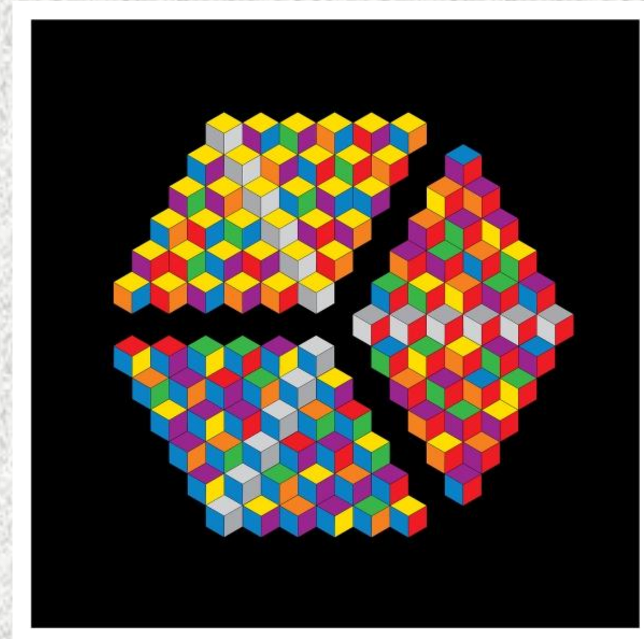


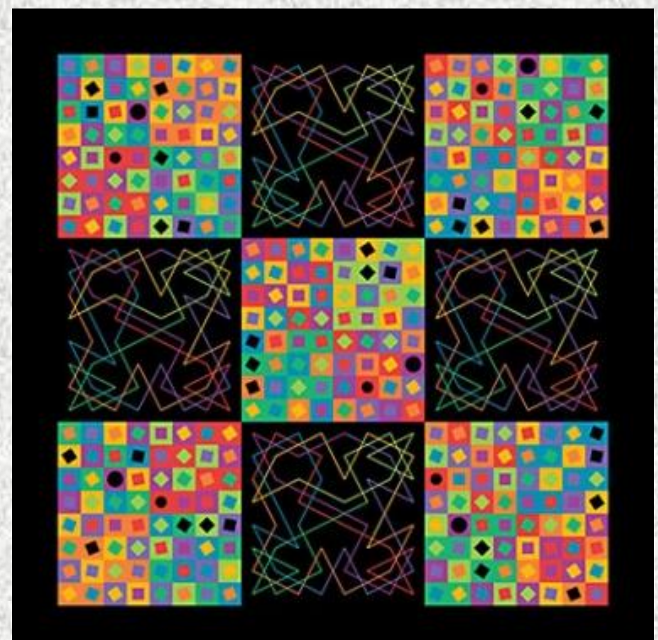
Panowie udowodnili również,
że **10 kamieni** lub **3 kolory** są niewystarczające, aby zapewnić nieokresowość!

Tym samym zakończyło się wykorzystywanie kwadratów MacMahona do rozwiązywania jednego z problemów Hilberta…

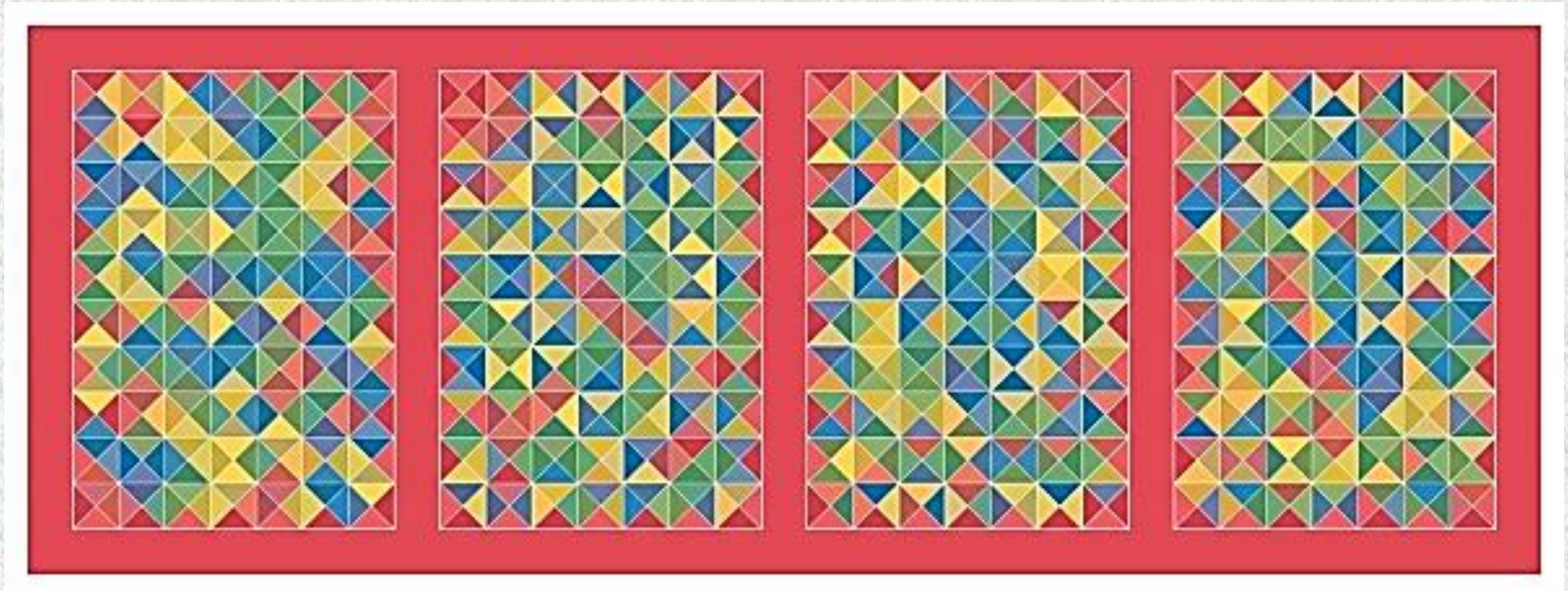
Kwadraty MacMahona są też inspiracją dla twórców!

Margaret Kepner - niezależna artystka z Waszyngtonu (z wykształcenia matematyk) „Mój twórczy proces polega na poruszaniu się pomiędzy koncepcjami matematycznymi, które mnie intrygują, a tworzeniem obrazów wizualnych, które interpretują te koncepcje w interesujący sposób”





"The Five Faces of Jaenisch," by Margaret Kepner (Washington, DC)



MARGARET KEPNER

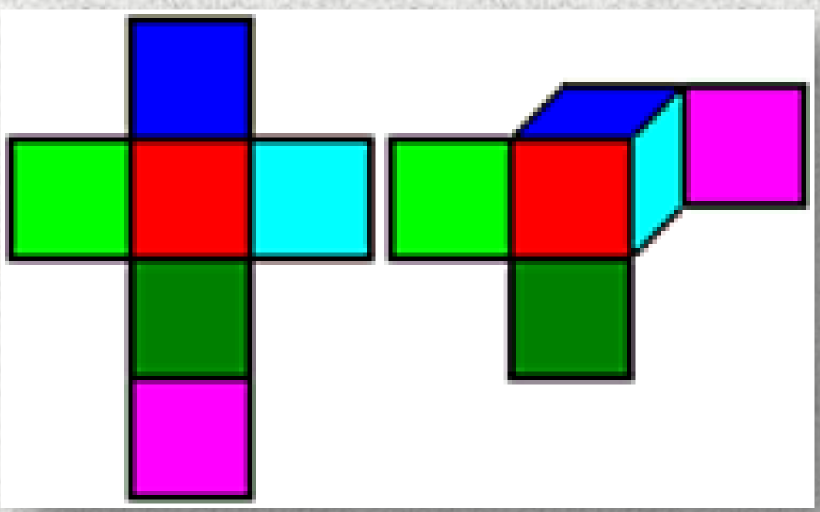
Broken Dishes, Mended Edges

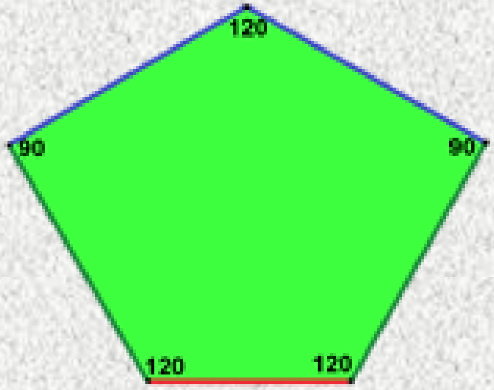
6" x 16"

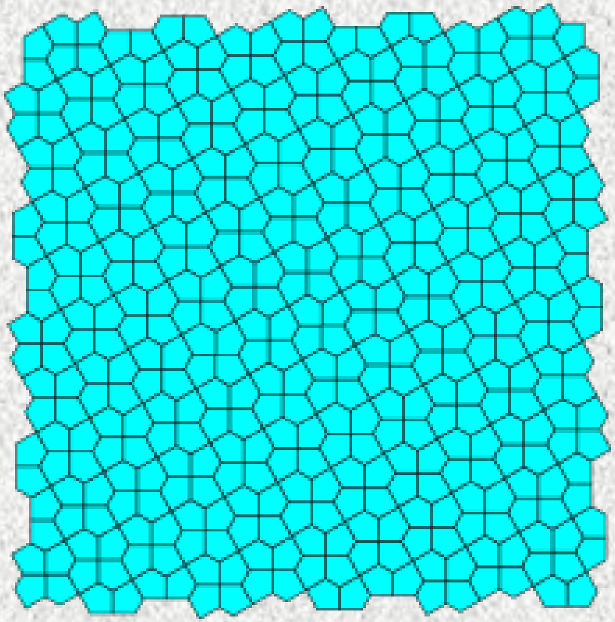
Archival Inkjet Print

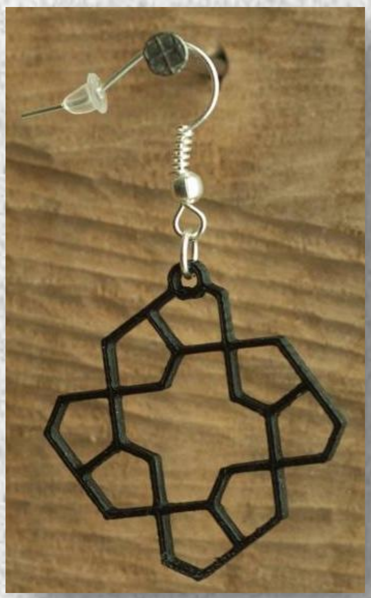
2011

Nie tylko kwadraty…

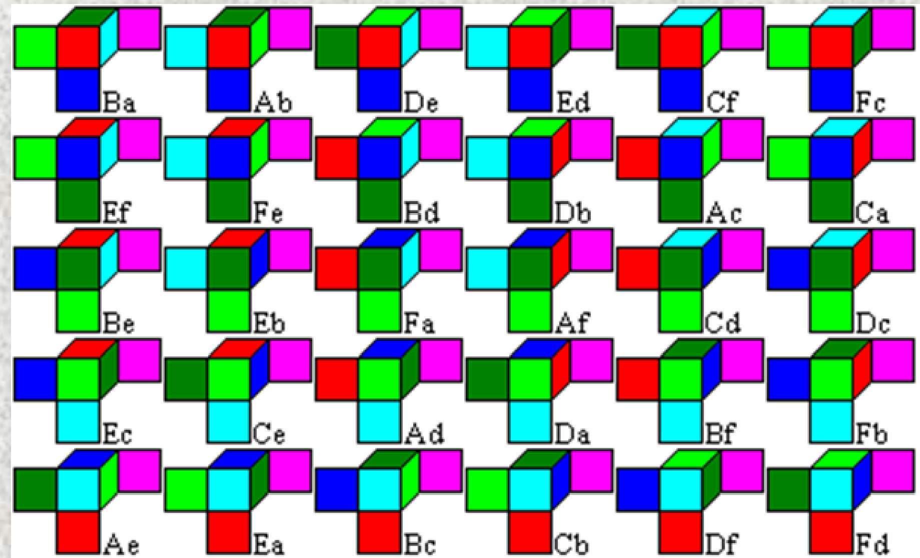


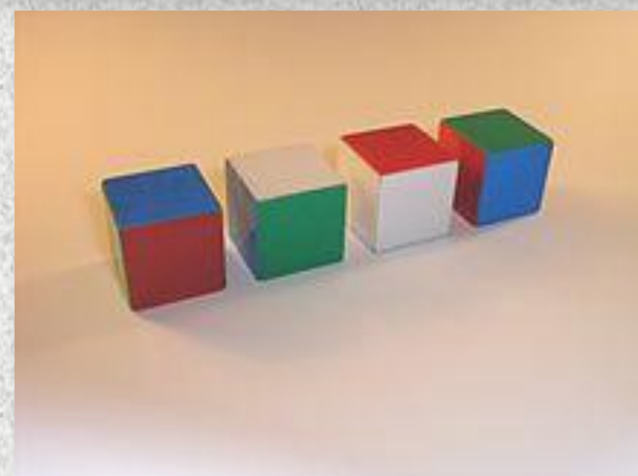






Pięciokątne płytki z Kairu...





Kostki MacMahona

Bibliografia

1) **P. A. MacMahon,** ***New mathematical pastimes,*** Cambridge, 1921

2) **M. Penszko, Ł*amigłówki. Podróże w krainę matematyki rekreacyjnej*”**
Prószyński i S-ka, Warszawa, 2009

3) **Wikipedia**

4) **strony firmy Kadron Enterprises http://www.gamepuzzles.com/**

5) **Wirtualny Wszechświat http://www.wiw.pl/**

6) **Gazeta Wyborcza http://wyborcza.pl/1,145452,19125823,genialny-wiesniak-matematyczne-formuly-zsyla-mu-bogini.html**

7) **Mathematical Art Galleries http://gallery.bridgesmathart.org/**

8) **film „Człowiek, który poznał nieskończoność”**