

KoALa (Kombinatoryka-Algorytmika-Logika)

V Liceum Ogólnokształcące im. Klaudivy Potockiej w Poznaniu,
Fundacja Matematyków Wrocławskich



Zabronione jest korzystanie z jakichkolwiek pomocy (w tym kalkulatorów, telefonów, komputerów itp.)! Czas pracy (z wpisaniem odpowiedzi do karty rozwiązań) to 45 minut.

Powodzenia!



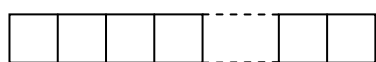
1. Wspinając się po drabinie, w której brakuje pojedynczych szczebli, Bajtek jest w stanie w każdym kroku ominąć maksymalnie jeden szczebel albo lukę po szczeblu. Np. dla drabiny z rysunku po lewej najmniejsza liczba szczebli, na których musi postawić stopę w czasie wspinania się po drabinie, to sześć.

Na ilu co najmniej szczeblach musi stanąć, aby dotrzeć do szczytu:

- drabiny z rysunku po prawej?
- drabiny powstałej z połączenia dwóch drabin z rys. po prawej (tzn. mającej kolejno grupy szczebli: 2, 3, 4, 2, 4, 1, 2, 7, 3, 4, 2, 4, 1, 2, 5)?
- drabiny powstałej z połączenia w ten sam sposób trzech drabin z rys. po prawej?



2. W grę „Przesuwanie” gra się na planszy złożonej z kwadratowych pól, jak na rysunku.



W pierwszym polu stoi pionek, który w kolejnych ruchach przesuwany jest zawsze o jedno, dwa lub trzy pola w prawo.

Jeśli pól jest 6, to dotrzeć do ostatniego można zatem na 13 sposobów.

- Na ile sposobów można dotrzeć do ostatniego pola, gdyby pól było 12?
- A jeśli pól byłoby 13?
- A jeśli pól byłoby 12, ale pionek można przestawiać tylko o dwa lub trzy pola w prawo?

3. W poniższym szyfrogramie różne cyfry oznaczają różne litery i różnym literom odpowiadają różne cyfry. Odszyfruj go, wiedząc, że oryginalny tekst zawiera słowa: ASIA, JOLA, MARIA, przy czym końcowe A we fragmencie MARIA może być pierwszą literą fragmentu ASIA.

1 2 1 3 2 1 4 3 2 1 5 1 6 7 1 7 6 5 1 1 8 7 1

4. Ciąg liczb jednocyfrowych nazywamy szczęśliwym, jeśli suma liczb z pozycji parzystych jest równa sumie liczb z pozycji nieparzystych. (Np. szczęśliwe są ciągi 1012 i 099).

- Ile jest szczęśliwych ciągów długości 3?
- Ile jest szczęśliwych ciągów długości 4?

5. W pewnej korporacji szefowi wszystkich szefów podlega bezpośrednio dwóch szefów stopnia 2, każdemu z nich – dwóch szefów stopnia 3 itd. aż do szefów stopnia 6. Ilu pracowników (włączając wszystkich szefów i ich szefa) może liczyć ta korporacja, jeśli każdy szef stopnia 6 ma jednego lub trzech podwładnych, a każdy pracownik firmy poza szefem wszystkich szefów (który nad sobą nie ma oczywiście nikogo) ma tylko jednego bezpośredniego przełożonego?

6. Rozważmy sumę iloczynów sąsiednich wyrazów ciągu liczbowego (np. dla ciągu 2, 1, 3, 2 taka suma wynosi $2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 11$).

Ile jest ciągów długości 20 zawierających każdą z liczb 1, 2, ..., 20, których suma iloczynów sąsiednich wyrazów jest największa? Podaj dwa z takich ciągów.

7. Zawartości trzech komórek komputera zmieniają się jednocześnie wg następującej zasady:

z układu

x	y	z
-----	-----	-----

 powstaje

$x/2$	y	$2z$
-------	-----	------

, gdy x jest parzyste,

a)

$(x-1)/2$	$y+z$	$2z$
-----------	-------	------

 w przeciwnym wypadku.

Jaka liczba będzie w środkowej komórce, w momencie gdy w pierwszej pojawi się 0, jeśli początkowa zawartość komórek to:

a)

2^{100}	0	1
-----------	---	---

b)

$2^{100}-1$	0	1
-------------	---	---

c)

$2^{100}-1$	2015	2015
-------------	------	------

8. W grę w sumowanie gra się na planszy z rysunku:

0	2	3	5	3	4	6	4	5	8	5	6	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Pionek stoi na polu 0 i w każdym ruchu przesuwa się w prawo o jedno pole lub przeskakuje nad jednym i ląduje na polu odległym o dwa w prawo. Wynikiem gry jest suma liczb z pól, na które pionek się przesunął, i podwojonej sumy liczb z pól, na które pionek skoczył. (Czyli gdyby planszę skrócić do pól 0, 2, 3, 5 można byłoby uzyskać maksymalnie wynik $2+2 \cdot 5$).

a) Jaki maksymalnie wynik można uzyskać dla pełnej planszy?

b) Jaki maksymalnie wynik można uzyskać, jeśli stawiamy dodatkowo warunek, że gra kończy się na przedostatnim polu?

c) Jaki maksymalnie wynik można uzyskać, jeśli grę kończymy na dowolnym polu, ale każdy ruch pionka ma być skokiem, o dwa lub trzy pola?

9. Blok pamięci komputera, aktualna zawartość którego przedstawiona jest na rysunku, jest kontrolowany przez osiem przełączników. Jeśli włączone są przełączniki A i 1, następuje odczyt komórki A1 itd.

Jeśli zepsuje się przełącznik kolumny, to w każdym wierszu możliwy jest tylko odczyt komórki z tej kolumny. Gdyby np. zepsuty był przełącznik A, to jako A1, B1, C1 i D1 zawsze odczytywana byłaby wartość A1, a jako A2, B2, C2 i D2 – wartość A2. Podobnie jeśli zepsuje się przełącznik wiersza – wówczas z każdej kolumny będzie czytana tylko wartość z tego wiersza.

	A	B	C	D
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	1	1	1

Zepsuł się (dokładnie) jeden przełącznik. Podaj który, jeśli wiadomo, że komputer, mając odczytać kolejno A1, B2 oraz D1, jako wynik poda:

a) 0, 1, 0

b) 1, 1, 0

c) 1, 0, 1

W każdym podpunkcie należy podać wszystkie możliwości. Jeśli uważasz, że dana sytuacja jest niemożliwa, w odpowiedzi do tego podpunktu napisz „niemożliwe”.



KARTA ODPOWIEDZI

.....
imię i nazwisko, klasa (poziom)

.....
nazwa szkoły (z miejscowością)

1. Drabiny (3×1 pkt) a) b) c)

2. Przesuwanie ($1 + 1 + 2$ pkt) a) b) c)

3. Szyfrogram (3 pkt)

4. Szczęśliwe ciągi (2×2 pkt) a) b)

5. Korporacja (4 pkt)

6. Suma iloczynów ($2 + 1$ pkt)

przykład 1:

przykład 2:

7. Komórki ($1 + 2 + 1$ pkt) a) b) c)

8. Sumowanie (3×1 pkt) a) b) c)

9. Przełączniki (3×1 pkt)

a)

b)

c)