

KoALa (Kombinatoryka-Algorytmika-Logika)

(gimnazjum, szkoła ponadgimnazjalna 2018/19)

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego,

Fundacja Matematyków Wrocławskich,

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu,

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej



Autorką ilustracji tytułowej jest Hanna Kuik, absolwentka V LO w Poznaniu.

Zabronione jest korzystanie z jakichkolwiek pomocy (w tym kalkulatorów, telefonów, komputerów itp.)! Odpowiedzi należy wpisać w pozostawione przy pytaniach miejsca. Czas pracy to 45 minut. Powodzenia!

.....
kategoria (wpisz wyraźnie: *gimnazjum* albo *szkoła ponadgimnazjalna*)
.....

.....
imię i nazwisko, klasa
.....

.....
nazwa szkoły i miejscowość
.....

Zad. 0 (20 pkt)

W każde pole wpisz najmniejszą liczbę naturalną, której iloczyn cyfr jest równy danemu n , lub kreskę, jeśli takich liczb nie ma.

$n =$	99	100	6^5	6^6
odp.:				

Zad. ½ (20 pkt)

W każde pole wpisz, ile jest naturalnych liczb 5-cyfrowych o iloczynie cyfr równym danemu n .

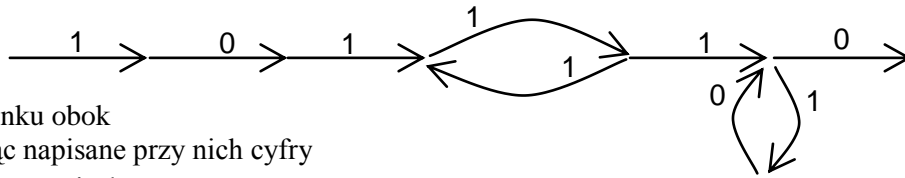
$n =$	9	15	20	100
odp.:				

Zad. 1 (15 pkt) Komputer K-2019 znajduje „ostateczną sumę cyfr” podanej mu liczby k w następujący sposób: sumuje cyfry k i jeśli wynik ma więcej niż jedną cyfrę, znajduje jego sumę cyfr itd., aż otrzyma liczbę jednocyfrową. Obliczenie w ten sposób ostatecznej sumy cyfr liczby 99 wymaga dwóch operacji: obliczenia sumy cyfr kolejno $9+9=18$ i $1+8=9$.

- a) Podaj najmniejszą liczbę, przy której K-2019 wykona 4 obliczenia sumy cyfr.
- b) Ile najwięcej obliczeń sumy cyfr może wykonać K-2019 przy obliczaniu ostatecznej sumy cyfr liczby 100-cyfrowej?
- c) Ile jest liczb 7-cyfrowych o ostatecznej sumie cyfr 1?

Zad. 2 (15 pkt)

Milczący Leniwiec przeszedł po grafie z rysunku obok wzdłuż strzałek, wypisując napisane przy nich cyfry (czyli mogło się okazać, że wypisał np. 101111010100).



Ile jest ciągów zero-jedynkowych o 100 jedynkach, które mogły powstać w ten sposób?

Ile cyfr liczy najkrótszy z nich?

A gdyby jedynek w ciągu było 101, to:

liczba wszystkich ciągów wynosi

długość najkrótszego z nich wynosi

Zad. 3 (15 pkt) Komputer oblicza wartości funkcji f o dwóch argumentach całkowitych dodatnich wg reguły:

$f(x, y) = 0$, gdy $x < y$, i $f(x, y) = 1 + f(x - y, y)$ w przeciwnym razie. Podaj wartości:

$f(2019, 2019) = \dots\dots\dots$

$f(2019, 1) = \dots\dots\dots$

$f(2019, 10) = \dots\dots\dots$

$f(2^{2019}, 2^{100}) = \dots\dots\dots$

Uzasadnij, że wg podanej reguły nie da się obliczyć wartości f dla $y = 0$.

Zad. 4 (15 pkt) Na stole leży 100 monet, z czego 99 odwróconych jest do góry reszką, a jedna orłem. Co sekundę n monet jednocześnie odwraca się w magiczny sposób na drugą stronę. Ile sekund musi co najmniej minąć, żeby wszystkie monety odwrócone były do góry reszką, dla:

$n = 5 \dots\dots\dots$

$n = 7 \dots\dots\dots$

A jeśli co sekundę odwraca się pięć lub siedem monet (niezależnie od tego, ile odwróciło się sekundę wcześniej)?

Zad. dodatkowe (dla rozstrzygnięcia ewentualnych remisów w gronie laureatów)

Ile cyfr ma iloczyn $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 55$?