

# VII KoALa (Kombinatoryka-Algorytmika-Logika), 2021

## SZKOŁY PONADPODSTAWOWE

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego  
Fundacja Matematyków Wrocławskich  
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu  
Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej  
Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego  
V Liceum Ogólnokształcące w Poznaniu



---

W tym roku konkurs przeprowadzany jest zdalnie, ale to nie znaczy, że można pracować nieuczciwie. Wysłanie rozwiązań jest równoznaczne ze zobowiązaniem pod słowem honoru, że Twoja praca była samodzielna!

Odpowiedzi (bez uzasadnień) należy wpisać we właściwym formularzu internetowym i zakończyć wypełnianie go do godziny 18<sup>10</sup>. Powodzenia!

Liczby większych od 1024 nie trzeba obliczać do końca, w odpowiedzi można pozostawić potęgę (oznaczaną symbolem ^), na której wykonuje się proste działanie arytmetyczne.

---

**Zadanie 1.** Ruch w grze „Samotnicz-k” polega na tym, że daną liczbę naturalną  $n$  można: pomnożyć przez  $k$  ALBO pomnożyć przez  $k$  i do wyniku dodać 1 lub 2.

Odpowiedz na pytania:

**1A.** Jakie liczby można uzyskać, startując od liczby 1 i wykonując dowolną liczbę ruchów, jeśli  $k=3$ ?

**1B.** Jakie liczby da się uzyskać, wykonując mniej niż 7 ruchów przy starcie z  $n=1$ , jeśli  $k=2$ ?

**1C.** Ile liczb można uzyskać w szóstym ruchu, startując od liczby 13, jeśli  $k=3$ ?

**1D.** Jakie reszty z dzielenia przez 25 dają liczby, które można otrzymać w szóstym ruchu, startując od liczby 13, jeśli  $k=5$ ?

**Zadanie 2.** Następujący algorytm działa na siedmiocyfrowej liczbie naturalnej:

- Jako  $i$  przyjmij 1.
- Dopóki cyfra nr  $i$ , licząc od przodu danej liczby, jest różna od cyfry nr  $i$ , licząc od jej końca, zwiększaj  $i$  o 1.

**2A.** Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy  $i=1$ ?

**2B.** Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy  $i=2$ ?

**2C.** Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy  $i=3$ ?

**2D.** Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy  $i=4$ ?

**2EA.** Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=1$ ?

**2EB.** Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=1$ ?

**2FA.** Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=2$ ?

**2FB.** Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=2$ ?

**2GA.** Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=3$ ?

**2GB.** Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=3$ ?

**2HA.** Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=4$ ?

**2HB.** Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy  $i=4$ ?

**Zadanie 3.** Wybrano 100 punktów na okręgu i ponumerowano je liczbami od 1 do 100. Następnie połączono każdy z każdym poza połączeniem 1 z 2, 2 z 3, 3 z 4, ..., 99 ze 100 i 100 z 1. Każdemu z połączeń przypisano liczbę będącą sumą numerów jego końców.

Należy wybrać takie połączenia, żeby suma przypisanych im liczb była największa i żeby dało się z nich stworzyć drogę, którą można przejść z każdego z wybranych na okręgu punktów do każdego innego, ale tylko na jeden sposób. Pozostałe połączenia należy usunąć.

**3A.** Ile połączeń należy zostawić?

**3B.** Ile różnych rozwiązań można uzyskać?

**3C.** Jaka jest najmniejsza liczba przypisana któremuś z wybranych połączeń?

**3D.** Ile wybranych połączeń wychodzi z punktu 97?

**3E.** Z jakimi punktami może być połączony punkt 98?

**Zadanie 4.** Liczba typu T to taka liczba naturalna, która spełnia wszystkie warunki:

- Dzieli się albo przez 10, albo przez 4.
- Jeśli dzieli się przez 3, to dzieli się przez 4.
- Dzieli się przez 8 i 3 lub dzieli się przez 7.

**4AA.** Jaka jest najmniejsza dwucyfrowa liczba typu T?

**4AB.** Jaka jest największa dwucyfrowa liczba typu T?

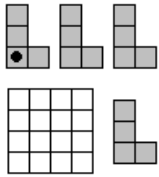
**4AC.** Ile jest dwucyfrowych liczb typu T?

**4B.** Jaka jest najmniejsza trzycyfrowa liczba typu T?

**4C.** Jaka jest najmniejsza czterocyfrowa liczba typu T?

**4D.** Jak myślisz: ile jest pięciocyfrowych liczb typu T? Punkty za zad. 4D przyznamy przy rozstrzygnięciu remisów osobom, które będą bliżej prawidłowej liczby.

**Zadanie 5.** Kamieniami tetramina w kształcie litery L (z rysunku) należy wypełnić kwadratowy diagram, tak aby wszystkie jego pola były pokryte. Klocki można odwracać na drugą stronę, a czarna kropka jest widoczna z obu stron. Na ilu polach tego diagramu może się znaleźć czarna kropka?



**Zadanie 6.** Na tablicy zapisane są liczby naturalne od 1 do 99. Co minutę ktoś podchodzi do tablicy i wybiera dwie zapisane na niej wówczas liczby. Jeśli wybrane liczby są równe, obie ściera. Jeśli są różne, mniejszą z nich zastępuje większą, a większą pozostawia.

**6A.** Po ilu minutach najpóźniej na tablicy zostanie jedna liczba?

**6B.** Po ilu minutach najwcześniej na tablicy zostanie jedna liczba?

**6C.** Jaka jest największa możliwa suma liczb stojących w jednym momencie na tablicy?

Czy możliwe jest, żeby w którymś momencie na tablicy:

**6DA.** była jedna jedynka i nic więcej?

**6DB.** było 98 takich samych liczb i jedna inna?

**6DC.** było 5 siódemek i nic więcej?

**6DD.** było 9 siódemek i być może jakieś inne liczby?

**6DE.** były liczby 1, 2, 3 i nic więcej?

**6DF.** było 98 liczb i wszystkie były równe?

**Jeśli uważasz, że to możliwe, podaj minimalny czas, po którym taką sytuację da się uzyskać. Jeśli uważasz, że to niemożliwe, w odpowiedzi wpisz 0.**

**Zadanie 7.** Stoimy w punkcie  $(0, 0)$  i po zapłaceniu 1 zł możemy zmienić (zmniejszyć lub zwiększyć) współrzędną  $x$  naszego położenia o 1, a po zapłaceniu 2 zł zmienić o 1 naszą współrzędną  $y$ .

Odległości mierzymy wzdłuż kratek.

Czy po 100 ruchach (opłatach) możemy znaleźć się w punkcie odległym od punktu startu o:

**7A1.** 1?

**7A2.** 2?

**7A3.** 3?

**7A99.** 99?

**7A44.** 44?

Czy po zapłaceniu w sumie 100 zł możemy znaleźć się w punkcie odległym od punktu startu o:

**7B1.** 1?

**7B2.** 2?

**7B3.** 3?

**7B33.** 33?

**7C.** W ilu punktach możemy się znaleźć po wydaniu 100 zł, jeśli w każdym ruchu będziemy się oddalać od punktu startu?

**Zadanie 8.** Robot startuje z punktu *S* i porusza się po kratkach tylko w prawo i w górę, nigdy nie schodząc poniżej pogrubionej linii, ale może jej dotykać (patrz rysunek).

Ile tras robot może wybrać, żeby dotrzeć do punktu:

**8A.** A?    **8B.** B?    **8C.** C?    **8D.** D?

