

VII KoALa (Kombinatoryka-Algorytmika-Logika) 2021

SZKOŁY PODSTAWOWE

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego
Fundacja Matematyków Wrocławskich
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu
Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego
V Liceum Ogólnokształcące w Poznaniu



W tym roku konkurs przeprowadzany jest zdalnie, ale to nie znaczy, że można pracować nieuczciwie. Wysłanie rozwiązań jest równoznaczne ze zobowiązaniem pod słowem honoru, że Twoja praca była samodzielna!

Odpowiedzi (bez uzasadnień) należy wpisać we właściwym formularzu internetowym i zakończyć wypełnianie go do godziny 18¹⁰. Powodzenia!

Zadanie 1. Ruch w grze „Samotny seler” polega na tym, że daną liczbę naturalną n można: pomnożyć przez 2 ALBO pomnożyć przez 2 i do wyniku dodać 1.

Odpowiedz na pytania:

1A. Jakie liczby można uzyskać, startując od liczby 1 i wykonując dowolną liczbę ruchów?

1B. Jakie liczby można uzyskać po szóstym ruchu, startując od liczby 1?

1C. Ile liczb można uzyskać po szóstym ruchu, startując od liczby 13?

ODP.

1A. naturalne większe od 1

1B. od 64 do 127

1C. 64

Zadanie 2. Następujący algorytm działa na siedmiocyfrowej liczbie naturalnej:

- Jako i przyjmij 1.
- Dopóki cyfra nr i , licząc od przodu danej liczby, jest różna od cyfry nr i , licząc od jej końca, zwiększaj i o 1.

2AA. Dla jakiego i najpóźniej algorytm musi się zakończyć?

2AB. Dlaczego?

2B. Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy $i=1$?

2C. Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy $i=2$?

2D. Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy $i=3$?

2E. Ile jest liczb, dla których algorytm zakończy się przy $i=4$?

2FA. Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=1$?

2FB. Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=1$?

2GA. Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=2$?

2GB. Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=2$?

2HA. Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=3$?

2HB. Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=3$?

2IA. Jaka jest najmniejsza liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=4$?

2IB. Jaka jest największa liczba, dla której algorytm zakończy się przy $i=4$?

ODP.

2AA. 4

2AB. wtedy najpóźniej są porównywane równe cyfry, porównujemy 4 cyfrę z nią samą

2B. 900000

2C. 810000

2D. 729000

2E. 6561000

2FA. 1000001

2FB. 9999999

2GA. 1000000

2GB. 9999998

2HA. 1000010

2HB. 9999988

2IA. 1000110

2IB. 9999888

Zadanie 3. Wybrano 100 punktów na okręgu i ponumerowano je liczbami od 1 do 100. Następnie połączono każdy z każdym, a każdemu z tych połączeń przypisano liczbę będącą sumą numerów jego końców.

Należy wybrać takie połączenia, żeby suma przypisanych im liczb była największa i żeby dało się z nich stworzyć drogę, którą można przejść z każdego z wybranych na okręgu punktów do każdego innego, ale tylko na jeden sposób. Pozostałe połączenia należy usunąć.

3A. Ile połączeń należy zostawić?

3B. Ile różnych rozwiązań można uzyskać?

3C. Jaka jest najmniejsza liczba przypisana któremuś z wybranych połączeń?

3D. Ile wybranych połączeń wychodzi z punktu 2?

3E. Z jakimi punktami może być połączony punkt 99?

ODP.

3A. 99

3B. 1

3C. 101

3D. 1

3E. tylko 100

Zadanie 4. Liczba typu T to taka liczba naturalna, która spełnia oba warunki:

- Dzieli się albo przez 10, albo przez 4.
- Dzieli się przez 8 i 3 lub dzieli się przez 7.

4AA. Jaka jest najmniejsza dwucyfrowa liczba typu T?

4AB. Jaka jest największa dwucyfrowa liczba typu T?

4AC. Ile jest dwucyfrowych liczb typu T?

4B. Jaka jest najmniejsza trzycyfrowa liczba typu T?

4C. Jaka jest najmniejsza czterocyfrowa liczba typu T?

4D. Jak myślisz: ile jest pięciocyfrowych liczb typu T? Punkty za zad. 4D przyznamy przy rozstrzygnięciu remisów osobom, które będą bliżej prawidłowej liczby.

ODP.

4AA. 24

4AB. 96

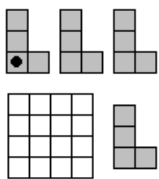
4AC. 8

4B. 112

4C. 1008

4D. 5785

Zadanie 5. Kamieniami tetramina w kształcie litery L (z rysunku) należy wypełnić kwadratowy diagram, tak aby wszystkie jego pola były pokryte. Klocki można odwracać na drugą stronę, a czarna kropka jest widoczna z obu stron. Na ilu polach tego diagramu może się znaleźć czarna kropka?



ODP. 12

Zadanie 6. Na tablicy zapisane są liczby naturalne od 1 do 99. Co minutę ktoś podchodzi do tablicy i wybiera dwie zapisane na niej wówczas liczby. Jeśli wybrane liczby są równe, obie ściera. Jeśli są różne, mniejszą z nich zastępuje większą, a większą pozostawia.

6A. Po ilu minutach najpóźniej na tablicy zostanie jedna liczba?

6B. Po ilu minutach najwcześniej na tablicy zostanie jedna liczba?

Czy możliwe jest, żeby w którymś momencie na tablicy:

6CA. była jedna jedynka i nic więcej?

6CB. było 98 takich samych liczb i jedna inna?

6CC. było 5 siódemek i nic więcej?

6CD. było 9 siódemek i być może jakieś inne liczby?

6CE. były liczby 1, 2, 3 i nic więcej?

6CF. było 98 liczb i wszystkie były równe?

Jeśli uważasz, że to możliwe, podaj minimalny czas, po którym taką sytuację da się uzyskać. Jeśli uważasz, że to niemożliwe, w odpowiedzi wpisz 0.

ODP.

6A. 4949

6B. 98

6CA. 98

6CB. 97

6CC.98

6CD. 0

6CE.96

6CF. 0