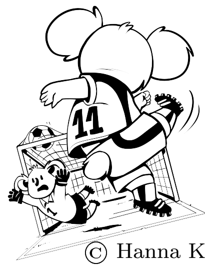
**KO**MBINATORYKA
**AL**GORYTMY
LOGIK**A**

# KOALA 2024

MECZ

WIELKOPOLSKA – DOLNY ŚLĄSK



© Hanna Kuik

Zadań jest 10. Czas na rozwiązywanie: 90 min. Czas na zadawanie pytań: 15 min.

## 1. Wikipedia

W Wikipedii hasła zawierają odnośniki do innych haseł. Tu rozważamy tylko odnośniki znajdujące się w następujących hasłach:

- hasło „Algorytmika" zawiera odnośniki do haseł: Informatyka, Struktura danych;
- „Australia": Europa, Grecy, Język angielski;
- „Człowiek rozumny": Europa, Ssaki;
- „Europa": Człowiek rozumny, Grecja, Język angielski, Ssaki;
- „Filozofia": Logika;
- „Grecja": Europa, Filozofia, Nauka;
- „Grecy": Australia, Grecja;
- „Informatyka": Algorytmika, Język angielski, Matematyka, Struktura danych, Teoria grafów;
- „Język angielski": Australia, Europa;
- „Kangur olbrzymi": Australia, Ssaki, Torbacze;
- „Koala": Australia, Ssaki, Torbacze;
- „Kombinatoryka": Logika matematyczna, Matematyka, Teoria grafów;
- „Logika": Filozofia, Logika matematyczna;
- „Logika matematyczna": Kombinatoryka, Logika, Matematyka, Teoria grafów;
- „Matematyka": Algorytmika, Informatyka, Kombinatoryka, Logika matematyczna;
- „Nauka": Filozofia, Logika;
- „Ssaki": Kangur olbrzymi, Torbacze, Człowiek rozumny;
- „Struktura danych": Algorytmika, Język angielski;
- „Torbacze": Kangur olbrzymi, Ssaki, Australia;
- „Teoria grafów": Matematyka, Informatyka, Logika matematyczna, Kombinatoryka;

Jak można najszybciej (w sensie liczby kliknięć) dojść od hasła „Koala" do hasła „Kombinatoryka", wykonując tylko kliknięcia w odnośniki?

## 2. Punkty kratowe

Punktem kratowym nazywamy punkt na płaszczyźnie, który ma obie współrzędne całkowite. Znajdź najmniejszą liczbę $n$ o tej własności, że dla dowolnych $n$ różnych punktów kratowych pomalowanych na zielono istnieją takie dwa zielone punkty, że odcinek o końcach w tych punktach zawiera co najmniej dwa inne (niekoniecznie zielone) punkty kratowe.

## 3. Gra na 66-kącie

Adaś i Ewa grają w grę na pewnym 66-kącie foremnym: na zmianę przypisują dowolną liczbę rzeczywistą do dowolnego wierzchołka tego 66-kąta, któremu jeszcze nic nie zostało przypisane. Grę rozpoczyna Adam i wygra ją wtedy i tylko wtedy, gdy suma liczb przypisanych do pewnych trzech wierzchołków tego 66-kąta, które stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego, wyniesie 0. Kto ma strategię wygrywającą w tej grze i jak powinien grać?

Przez strategię wygrywającą rozumiemy taki sposób gry, który gwarantuje wygraną, nawet z doskonale grającym przeciwnikiem.

## 4. Ciekawe ciągi

Dla każdej liczby naturalnej tworzymy nieskończony ciąg, którego pierwszym wyrazem jest ta liczba, a każdy następny jest sumą kwadratów cyfr wyrazu poprzedniego. Takie ciągi nazwijmy ciekawymi. Przykładowo, ciekawy ciąg zaczynający się od 7 ma takich pięć następnych wyrazów: 49, 97, 130, 10, 1. Udowodnijcie, że istnieje ciekawy ciąg zaczynający się liczbą trzycyfrową, w których żaden wyraz nie wynosi 1, ale takich ciągów jest mniej niż 888.

## 5. Szyfrowanie

Zosia napisała program szyfrujący, zamieniający dowolny ciąg złożony z polskich liter na inny taki ciąg. Romek ma program deszyfrujący, który dowolny ciąg utworzony przez program Zosi zamieni z powrotem na ciąg oryginalny. Udowodnij, że jeśli program Zosi zamieni jakiś ciąg na krótszy, to istnieje też taki ciąg, który program zamieni na dłuższy.

### 6. Hazardzista

Panda ma talię kart, w której jest 6 kart czerwonych i 4 karty niebieskie. Panda proponuje koali następującą grę: najpierw potasuje tę talię kart, a potem będzie odsłaniać kolejno karty. Koala przed rozpoczęciem odsłaniania kart musi podać, jakie kolory będą miały wszystkie kolejno odsłaniane karty, tzn. musi podać ciąg 10 kolorów kart, przy czym każdy z kolorów może pojawić się w ciągu dowolną liczbę razy. Ponadto przed każdą odsłanianą kartą koala musi postawić pewną kwotę na tę kartę – jeśli poprawnie odgadnie kolor tej karty, to wygrywa postawioną kwotę, a jeśli nie, to kwotę tę przegrywa. Koala postanowiła, że obstawi dla wszystkich kart kolor czerwony i postawi na kolor pierwszej karty 512 zł. Kolejne obstawiane kwoty będą wyznaczane w następujący sposób: jeśli koala zgadła poprawnie kolor poprzedniej karty, to aktualnie obstawiana kwota będzie dwa razy mniejsza od poprzedniej, a jeśli koala nie zgadła poprawnie koloru poprzedniej karty, to aktualnie obstawiana kwota będzie półtora raza większa od poprzedniej. Interesuje nas zysk koali na koniec gry, tzn. różnica pomiędzy sumą wszystkich kwot wygranych przez koalę i sumą wszystkich kwot przez nią przegranych. Ile ten zysk może wynosić? Podajcie wszystkie możliwości i uzasadnijcie, że innych możliwości nie ma.

Przykład: Załóżmy, że w potasowanej talii pierwsze cztery karty to kolejno karta czerwona, karta niebieska, karta niebieska, karta czerwona. Wówczas koala kolejno: wygrywa 512 zł, przegrywa $0{,}5 \cdot 512 = 256$ zł, przegrywa $1{,}5 \cdot 256 = 384$ zł i wygrywa $1{,}5 \cdot 384 = 576$ zł. Zatem zysk koali po pierwszych czterech kartach to $512 + 576 - 256 - 384 = 448$ zł.

### 7. Klocki

Klasa VIa bawi się dziesięcioma klockami o wysokościach: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 cm, ustawiając je po jednym w każdym wierzchołku 10-kąta foremnego i za każdym razem obliczając sumę dodatnich różnic wysokości każdych dwóch sąsiednich.

Na przykład jeśli na wierzchołkach stoją kolejno klocki o wysokościach: $11, 13, 15, 5, 7, 9, 19, 17, 3, 1$ cm, to suma taka wynosi (w centymetrach)

$$(13-11)+(15-13)+(15-5)+(7-5)+(9-7)+(19-9)+$$
$$+(19-17)+(17-3)+(3-1)+(11-1)=56.$$

Na ile sposobów mogą ustawić te klocki tak, by otrzymana suma była najmniejsza z możliwych?

Zakładamy, że wierzchołki wielokąta są ponumerowane, więc ważne jest, w którym wierzchołku stoi dany klocek.

### 8. Sznur

Ali i Baba odziedziczyli sznur, na który nanizanych jest 10 diamentów i 10 szmaragdów. Jeszcze go nie widzieli, więc nie wiedzą, w jakiej kolejności nanizane są kamienie. Muszą jednak przed okazaniem im sznura wybrać taką liczbę $c$, by mieć pewność, że gdy dostaną sznur, będą mogli przeciąć go w co najwyżej $c$ miejscach tak, by po rozdzieleniu między siebie otrzymanych kawałków każdemu przypadło po 5 diamentów i 5 szmaragdów.

Jeśli na przykład podaliby liczbę 3, a kamienie nanizane byłyby w kolejności: DSDSDSSSDDDDSSSDDSDS, to mogliby sznur rozciąć tak:

DSD|SDSSSDDDDS|SSDDSDS.

Ali wziąłby środkowy fragment, a Baba – pozostałe dwa. Wykonali przy tym tylko dwa cięcia, co jest dozwolone – nie muszą wykorzystać trzech cięć.

Jednak aby dostać sznur, Ali i Baba muszą wybrać najmniejszą liczbę $c$, która gwarantuje istnienie opisanego podziału sznura, niezależnie od kolejności kamieni. Jaką liczbę powinni wybrać?

### 9. Szkielet

Dane są odcinki o długościach $1, 2, \ldots, 199$. Rozstrzygnijcie, czy z wszystkich tych odcinków można zbudować szkielet prostopadłościanu. Nic nie może wystawać, odcinki mogą mieć wspólne tylko końce.

Zakładamy, że szkielet prostopadłościanu tworzą wszystkie jego krawędzie.

### 10. Szachownica

Mamy szachownicę $2020 \times 2020$. W każde jej pole wpisujemy inną liczbę naturalną, wybierając spośród liczb: $1, 2, \ldots, 4080400$. Czy można to zrobić w taki sposób, by suma liczb w każdym wierszu (z wyjątkiem pierwszego) była większa o 1 od sumy w wierszu poprzednim?

## 1. Wikipedia

**Odpowiedź: 7**

**Rozwiązanie:**

Przeszukując graf skierowany wszerz, znajdujemy minimalne liczby kroków, w jakich można dojść do kolejnych haseł startując z hasła koala:

- do hasła "Australia" można dojść w 1 kroku;
- do hasła "Ssaki" można dojść w 1 kroku;
- do hasła "Torbacze" można dojść w 1 kroku;
- do hasła "Europa" można dojść w 2 krokach (np. z hasła "Australia");
- do hasła "Grecy" można dojść w 2 krokach (np. z hasła "Australia");
- do hasła "Język angielski" można dojść w 2 krokach (np. z hasła "Australia");
- do hasła "Kangur olbrzymi" można dojść w 2 krokach (np. z hasła "Ssaki");
- do hasła "Człowiek rozumny" można dojść w 2 krokach (np. z hasła "Ssaki");
- do hasła "Grecja" można dojść w 3 krokach (np. z hasła "Europa");
- do hasła "Filozofia" można dojść w 4 krokach (np. z hasła "Grecja");
- do hasła "Nauka" można dojść w 4 krokach (np. z hasła "Grecja");
- do hasła "Logika" można dojść w 5 krokach (np. z hasła "Filozofia");
- do hasła "Logika matematyczna" można dojść w 6 krokach (np. z hasła "Logika");
- do hasła "Kombinatoryka" można dojść w 7 krokach (np. z hasła "Logika matematyczna");

Przykładowa trasa: Koala-Australia-Europa-Grecja-Filozofia-Logika-Logika matematyczna-Kombinatoryka (najkrótsze trasy są cztery).

## 2. Punkty kratowe

**Odpowiedź: 10**

**Rozwiązanie:**

Wśród dowolnych 10 punktów istnieją 2, które mają tę samą resztę z dzielenia przez 3 zarówno pierwszej współrzędnej, jak i drugiej (ponieważ jest 9 możliwych par reszt z dzielenia przez 3). Weźmy dwa takie punkty $(3x+r, 3y+s)$ oraz $(3z+r, 3t+s)$. Odcinek o końcu w tych punktach przechodzi przez punkty $(2x+z+r, 2y+t+s)$ oraz $(x+2z+r, y+2t+s)$.

Z drugiej strony rozważmy zbiór 9 punktów $(a, b)$, gdzie $a, b$ przyjmują wartości 0,1,2. Najkrótszy odcinek, który zawiera 4 punkty kratowe, ma długość 3, ponadto wszystkie 9 punktów zawierają się w kole o średnicy $2\sqrt{2}$, więc żaden odcinek o końcach w tych punktach nie zawiera 2 innych punktów kratowych.

## 3. Gra na 66-kącie

**Odpowiedź: Ewa**

**Rozwiązanie:**

Wierzchołki danego 66-kąta można podzielić na 22 rozłączne trójki wierzchołków trójkątów równobocznych. Gdy Adam przypisze pewną liczbę jakiemuś wierzchołkowi któregoś z tych trójkątów, Ewa przypisuje pewną liczbę jakiemuś wierzchołkowi innego trójkąta, z wszystkimi wierzchołkami wolnymi. Trójkątów jest parzyście wiele, więc w pewnej rundzie Adam jako pierwszy przypisze liczbę wierzchołkowi trójkąta, w którym dotąd była tylko jedna przypisana liczba. Wtedy Ewa przypisuje tam odpowiednią trzecią liczbę i wygrywa.

## 4. Ciekawe ciągi

**Rozwiązanie:**

Ciekawy ciąg zaczynający się od 101 wygląda tak: 2, 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 i dalej się powtarza, więc nie zawiera jedynki.

Znajdziemy teraz przynajmniej 13 ciekawych ciągów, które zaczynają się liczbą 3-cyfrową i mają wyraz równy 1. Jedynka występuje w ciągach zaczynających się od 1, 10 i 100, zatem i od liczb, w których sumach kwadratów cyfr wynosi 1, 10 lub 100, czyli: 13, 31, 103, 130, 301, 310, 68, 86, 608, 680, 806, 860, a z kolei 13 lub 68 występuje w ciągach zaczynających się od: 23, 32, 203, 230, 302, 320, 28, 82, 208, 280, 802, 820.

Mamy więc co najmniej 17 trzycyfrowych początków ciekawych ciągów z jedynką: 100, 103, 130, 301, 310, 608, 680, 806, 860, 203, 230, 302, 320, 208, 280, 802, 820.

W rzeczywistości jest ich więcej.

---

## 5. Szyfrowanie

**Rozwiązanie:**

Jeśli ciąg, który po zaszyfrowaniu stanie się krótszy, będzie zaszyfrowany miał długość $n$, to któryś z ciągów o długości co najwyżej $n$ musi się po zaszyfrowaniu wydłużyć – gdyby tak nie było, wszystkie napisy o długości co najwyżej $n$ dawałyby po zaszyfrowaniu wszystkie ciągi długości co najwyżej $n$ (bo szyfrowanie różnych ciągów musi dawać różne szyfrogramy), a dodatkowo jeden z nich byłby również szyfrogramem ciągu o długości większej od $n$.

---

## 6. Hazardzista

**Odpowiedź: jedyna możliwość to zysk 943 zł.**

**Rozwiązanie:**

Pokażemy najpierw, że niezależnie od potasowania kart zysk jest taki sam. Załóżmy, że w permutacji talii kart $P$ na $k$-tym ($k \in \{1, 2, \ldots, 9\}$) miejscu jest karta czerwona, a na $(k+1)$-szym miejscu karta niebieska. Niech $P'$ będzie permutacją talii kart, w której na $k$-tym miejscu będzie karta niebieska, na $(k+1)$-szym miejscu karta czerwona, a układ pozostałych kart będzie taki sam, jak w permutacji $P$. Załóżmy, że kwota, którą Koala stawia na $k$-tą kartę to $A$ zł. Wówczas zysk Koali z kart $k$ i $k+1$ w permutacji $P$ to $A - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}A$, a na kartę $(k+2)$-gą stawia $A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}A$ zł. Natomiast zysk Koali z kart $k$ i $k+1$ w permutacji $P'$ to $-A + \frac{3}{2}A = \frac{1}{2}A$, a na kartę $(k+2)$-gą stawia $A \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}A$ zł. Ponieważ układ pozostałych kart w permutacjach $P$ i $P'$ jest taki sam, to łączny zysk Koali z tych dwóch permutacji też będzie taki sam. Ale jeśli zaczniemy od dowolnej permutacji talii kart $P$, to stosując pewien ciąg operacji typu zamiana kolejności dwóch kolejnych kart, jeśli pierwsza jest czerwona, a druga niebieska, możemy w skończonej liczbie operacji przejść do permutacji talii, w której pierwsze cztery karty są niebieskie, a pozostałe są czerwone. Ponieważ te operacje nie zmieniają końcowego zysku, to wszystkie permutacje dają taki sam zysk, jak permutacja $NNNNCCCCCC$.

Policzymy teraz zysk z permutacji $NNNNCCCCCC$. W tej sytuacji kwota postawiona na $i$-tą kartę to $512 \cdot (\frac{3}{2})^{i-1}$, jeśli $i \leqslant 4$ i $512 \cdot (\frac{3}{2})^4 \cdot (\frac{1}{2})^{i-5}$ dla $i > 4$. Zatem łączny zysk to

$$-\sum_{i=1}^{4} 512 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^i + \sum_{i=5}^{10} 512 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-5} = -4160 + 5103 = 943.$$

---

## 7. Klocki

**Odpowiedź: 2560**

**Rozwiązanie:**

Rozważmy pewne ustawienie klocków i poprowadźmy odcinek łączący najniższy klocek $A$ z najwyższym. Niech $l_1, l_2, \ldots, l_k$ będą wysokościami kolejnych klocków stojących po lewej stronie tego odcinka, a $p_1, p_2, \ldots, p_{8-k}$ – po prawej, przy czym w obu przypadkach zaczynamy odliczanie od sąsiada klocka $A$. Jeden z ciągów może być „pusty”. Suma obliczna przez klasę wynosi wtedy

$$(|l_1 - 1| + |l_2 - l_1| + |l_3 - l_2| + \ldots + |19 - l_k|) + +(|p_1 - 1| + |p_2 - p_1| + |p_3 - p_2| + \ldots + |19 – p_{8-k}|).$$

Z warunku trójkąta lub po prostu patrząc na przechodzenie po osi liczbowej kolejno po liczbach $1, l_1, l_2, \ldots, l_k, 19$ oraz po liczbach $1, p_1, p_2, \ldots p_{8-k}, 19$, wartość wyrażenia w każdym z dwóch nawiasów to co najmniej 18, przy czym 18 wychodzi wtedy i tylko wtedy, gdy oba te ciągi są rosnące. Aby uzyskać takie ustawienie, należy wybrać, które klocki spośród klocków o wysokościach $3, 5, 7, \ldots, 17$ mają stanąć po lewej i wówczas pozostałe będą stanowić ciąg po prawej. Wybieramy zatem dowolny podzbiór zbioru 8-elementowego, czyli możliwości jest $2^8 = 256$. Uwzględniając, że klocek $A$ ustawiamy na początku 10 sposobów, mamy 2560 ustawień.

---

## 8. Sznur

**Odpowiedź: 2**

**Rozwiązanie:**

Jedno cięcie nie wystarczy np. dla układu DDDDDDDDDDSSSSSSSSSS. Uzasadnimy, że dwa cięcia wystarczą.

Jeśli nie jest możliwy dobry podział sznura w jednym cięciu, to popatrzmy na efekt dwóch cięć bezpośrednio za kamieniami pierwszym i jedenastym. Załóżmy, że ten podział się nie jest dobry, czyli część środkowa, złożona z 10 kamieni, nie zawiera 5 diamentów. Bez straty ogólności niech diamentów będzie więcej niż 5 w części środkowej. Popatrzmy teraz na efekt cięć za kamieniami nr 2 i 12 itd. Po każdej zmianie cięć, na których efekt patrzymy, liczba diamentów w „przesuwanej dziesiątce” kamieni (początkowo lewej, później środkowej, a na końcu prawej) zmienia się najwyżej o 1, a po przesunięciu naszej dziesiątki na koniec mamy w niej mniej niż 5 diamentów. Zatem w którymś kroku posrednim rozpatrywana dziesiątka kamieni musiała zawierać dokładnie 5 diamentów.

---

## 9. Szkielet

**Odpowiedź: tak**

**Rozwiązanie:**

Połączmy odcinki w pary w ten sposób, by suma długości dla każdej pary wynosiła 199, mianowicie: $(1, 198), (2, 197), \ldots, (99, 100)$. Otrzymamy 99 nowych odcinków, każdy o długości 199. Razem z odcinkiem o długości 199 będziemy mieć 100 takich odcinków. Ponieważ $100 = 4 \cdot 25$, łatwo można z nich zbudować szkielet prostopadłościanu o wymiarach:

$$199m \times 199n \times 199(25 - m - n),$$

gdzie $m \geqslant 1, n \geqslant 1, m + n \leqslant 24$. Na przykład dla $m = n = 12$ otrzymamy prostopadłościan o bokach $2388 \times 2388 \times 199$.

---

## 10. Szachownica

**Odpowiedź: nie**

**Rozwiązanie:**

Załóżmy nie wprost, że da się. Niech $s$ oznacza sumę z pierwszego wiersza. Wtedy suma liczb na całej planszy wynosi $s + \ldots + (s + 2019) = 1010(2s + 2019)$. Z drugiej strony, każda liczba z podanego zbioru występuje dokładnie raz, więc suma na planszy wynosi

$$1 + \ldots + 4080400 = \frac{2020^2(2020^2 + 1)}{2} = 1010 \cdot 2020 \cdot (2020^2 + 1).$$

Widzimy, że powyższa liczba jest podzielna przez 4, a liczba $1010(2s + 2019)$ nie jest, więc doszliśmy do sprzeczności.