

IX KoALa (KOmbinatoryka-ALgorytmika-LOGika), 2023

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego
Fundacja Matematyków Wrocławskich
Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu
Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej
V Liceum Ogólnokształcące w Poznaniu



Autorką ilustracji tytułowej jest Hanna Kuik, absolwentka V LO w Poznaniu.

Zabronione jest korzystanie z kalkulatorów, telefonów, komputerów i innych pomocy.

Odpowiedzi należy umieścić w miejscach zaznaczonych przy pytaniach.

Czas pracy wynosi 45 minut. Powodzenia!

kategoria „Senior” (szkoły ponadpodstawowe)

.....
imię i nazwisko, klasa

.....
nazwa szkoły (z miejscowością)

1. (10 p.) Ile jest liczb naturalnych, których każda cyfra poza pierwszą jest mniejsza od poprzedniej:

10-cyfrowych?

8-cyfrowych?

9-cyfrowych?

7-cyfrowych?

2. (9 p.) Mamy 7 monet o różnych nominałach n_1, n_2, \dots, n_7 , przy czym zakładamy, że nominałem może być każda dodatnia liczba całkowita. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość największej z liczb n_1, n_2, \dots, n_7 , jeśli mając do dyspozycji te monety, da się zapłacić każdą całkowitą kwotą od 1 do:

60 (włącznie)?

66 (włącznie)?

70 (włącznie)?

3. (12 p.) Mówimy, że liczba x jest zwiernikiem liczby naturalnej z , jeśli w zbiorze Y jest liczba dająca przy dzieleniu przez 10 tę samą resztę co x , a przy dzieleniu przez 11 tę samą resztę co z . Zwiernikiem ilu liczb trzycyfrowych jest liczba 1, jeśli zbiór Y to:

{11, 12, 13, ..., 99}?

{11, 12, 13, ..., 19}?

{10, 20, 30, ..., 90}?

Ile minimalnie elementów musi mieć Y , żeby liczba 1 była zwiernikiem:

liczb 11, 22, 33, ... i 99?

liczb 10, 20, 30, ... i 90?

liczb 11, 12, 13, ... i 19?

wszystkich liczb naturalnych?

4. (10 p.) Robot Ro umie wykonywać następującą procedurę Pr z parametrem n :

```
{ - jeśli  $n > 0$ , wykonaj  $Pr(n-1)$ ;  
  - obróć się o  $90^\circ$  w prawo;  
  - przejdź naprzód o  $n$  jednostek  
}
```

Podpisując długości wszystkich odcinków, naszkicuj trasę, jaką przebędzie Ro, gdy wystartuje zwrócony na północ i wykona:

$Pr(3)$:

$Pr(4)$:

$Pr(5)$:

W jakiej odległości (w linii prostej) od startu znajdzie się Ro po wykonaniu $Pr(33)$?

5. (9 p.) Z 1000 jednostkowych drewnianych sześcianników zbudowano sześcian. Jeśli któryś z narożnych sześcianników oznaczymy jako $(1, 1, 1)$ (pozycja nr 1 w rzędzie nr 1 poziomu nr 1), to przeciwległy mu sześciannik będzie oznaczony jako $(10, 10, 10)$.

Kornik przemieszcza się od środka jednego sześciannika do środka kolejnego, przechodząc przez ich wspólną ściankę. Ile jest najkrótszych dróg, którymi kornik może przejść:

od sześciannika $(1, 1, 1)$ do $(3, 3, 3)$?

od sześciannika $(1, 1, 1)$ do $(4, 4, 4)$?

od sześciannika $(1, 1, 1)$ do $(4, 4, 4)$, omijając sześciannik $(3, 3, 3)$?

(*) Jeśli kornik byłby w stanie przejść najkrótszą drogę od $(1, 1, 1)$ do $(10, 10, 10)$ w sekundę, to ile dni zajęłoby mu zrealizowanie wszystkich najkrótszych dróg od $(1, 1, 1)$ do $(10, 10, 10)$ w tę i z powrotem?

.....

Punkty za podpunkt (*) będą przyznane tylko przy rozstrzygnięciu remisów wśród laureatów.