

X KoALa (Kombinatoryka-Algorytmika-Logika), 2024

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Fundacja Matematyków Wrocławskich

Oddział Poznański Polskiego Towarzystwa Matematycznego

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu

Instytut Informatyki Politechniki Poznańskiej

V Liceum Ogólnokształcące w Poznaniu



Autorką ilustracji tytułowej jest Hanna Kuik, absolwentka V LO w Poznaniu.

Zabronione jest korzystanie z jakichkolwiek pomocy (w tym kalkulatorów, telefonów, komputerów itp.)! Odpowiedzi umieść w pozostawionych przy pytaniach miejscach. Czas pracy to 45 minut. Powodzenia!

kategoria „Senior” (szkoły ponadpodstawowe)

.....
imię i nazwisko, klasa

.....
nazwa szkoły (z miejscowością)

1. (24 pkt) Plansza do gry „Poskacz sobie” ma 101 wierszy i 101 kolumn ponumerowanych kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. W każdym polu jest liczba 0, 1 lub 2 według schematu z rysunku. Na początku pionek stoi w wierszu 1 i kolumnie 1 (czyli na polu (1, 1)), a każdy ruch w tej grze polega na przeniesieniu pionka z pola, na którym stoi, w prawo albo w dół o tyle pól, ile wynosi liczba na tym polu. (Czyli jeśli na przykład dotrze się na pole w wierszu 3 i kolumnie 5 (pole (3, 5)), to można z niego przenieść pionek o 2 pola w prawo (na pole (3, 7)) albo 2 pola w dół (na (5, 5)).

	1	2	3	4	5	...
1	2	0	1	2	0	...
2	0	1	2	0	1	...
3	1	2	0	1	2	...
4	2	0	1	2	0	...
5	0	1	2	0	1	...
6	1	2	0	1	2	...
...

Na ile pól w wierszu 101 da się dojść?

Na ilu polach może stać pionek po 44. skoku?

Na pole (3, 4) można dojść na dwa sposoby: kolejno przez pola (1, 3) i (1, 4) albo (3, 1) i (3, 2).

Na ile sposobów da się dojść na pole (101, 2)? A na (101, 3)?

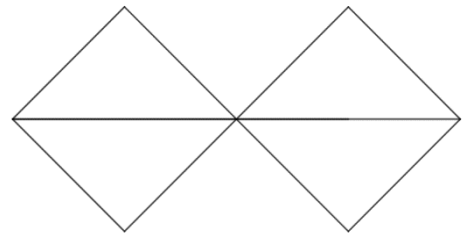
2. (10 pkt) Komputer zapisał obok siebie bez odstępu cztery różne liczby naturalne: 12121212.

Ich suma może wynosić: a) maksymalnie: b) minimalnie:

3. (12 pkt) Liczba palindromiczna to taka, która jest taka sama czytana od przodu i od tyłu. Palindromiczne są na przykład liczby 121 i 987789. Ile jest palindromicznych liczb, których przynajmniej jedna cyfra to 3:

a) pięciocyfrowych – b) sześciocyfrowych – c) siedmiocyfrowych –

4. (6 pkt) Na ile sposobów można narysować tę figurę, jeśli po każdym odcinku przechodzi się tylko raz (a różne sposoby to takie, gdzie kolejność rysowanych odcinków jest różna)?
 Uwaga: rysowanie można zacząć w dowolnym miejscu!



5. (24 pkt) Wywołujemy procedurę *haha* o argumente n :

wypisz n ;
 jeśli $n > 2$ i n daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0, wykonaj $haha(n/3)$;
 jeśli $n > 2$ i n daje przy dzieleniu przez 3 resztę dodatnią, wykonaj $haha(2n+1)$.

Ile jest trzycyfrowych liczb n , dla których: kolejno wypisywane liczby są coraz mniejsze?

kolejno wypisywane liczby są coraz większe?

pierwsza wypisana liczba jest większa od drugiej, a druga od trzeciej?

pierwsza wypisana liczba jest większa od drugiej, a trzecia od pierwszej?

pierwsza wypisana liczba jest większa od trzeciej, a trzecia od drugiej?

pierwsza wypisana liczba jest większa od trzeciej, a druga od pierwszej?

druga wypisana liczba jest mniejsza od pierwszej,

trzecia od drugiej, a każda kolejna jest większa niż poprzednia?

6. (24 pkt) Czy istnieje liczba trzycyfrowa o iloczynie cyfr równym:

9 100

44 200

108 250

Jeśli uważasz, że tak, podaj największą taką liczbę trzycyfrową.

6a. Ile jest liczb czterocyfrowych o iloczynie cyfr równym 0?

Ostateczny iloczyn cyfr danej liczby naturalnej otrzymuje się, mnożąc jej cyfry i powtarzając tę operację tak długo, aż wynik będzie jednocyfrowy. Na przykład ostatecznym iloczynem cyfr liczby 4321 jest 8, bo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, a $2 \cdot 4 = 8$.

Obliczenie ostatecznego iloczynu cyfr liczby 4321 wymaga dwóch kroków, a na przykład dla liczby 139 potrzeba trzech (w kolejnych uzyskuje się iloczyny 27, 14 i 4).

6b. Podaj najmniejszą liczbę, dla której obliczenie ostatecznego iloczynu cyfr wymaga 4 kroków:

6c. Podaj dwie liczby trzycyfrowe, dla których obliczenie ostatecznego iloczynu cyfr wymaga 4 kroków:

6d. Ile liczb dwucyfrowych ma ostateczny iloczyn cyfr równy 0?

* Ile liczb pięciocyfrowych ma ostateczny iloczyn cyfr równy 0?

Punkty za podpunkt oznaczony * przyznamy tylko przy rozstrzygnięciu remisów wśród laureatów.

X KoALa (KOMBINATORYKA-ALGORYTMIKA-LOGIKA), 2024

kategoria „Senior” (szkoły ponadpodst.) – ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

1. (24 pkt) Na ile pól w wierszu 101 da się dojść? 67 (5 pkt)

Na ilu polach może stać pionek po 44. skoku? 67 (5 pkt)

Na ile sposobów da się dojść na pole (101, 2)? 33 (5 pkt)

A na (101, 3)? 595 (9 pkt; dopuszczamy wyrażenie arytmetyczne o tej wartości, np. $34 + 34 \cdot 33/2$).

2. (10 pkt) a) 2145 b) 156 (po 5 pkt)

3. (12 pkt) a) 252 b) 252 c) 3168 (po 4 pkt)

(Dopuszczamy wyrażenie arytmetyczne o danej wartości, np. $9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 9^2$ w podpunkcie c).

Jeśli odpowiedź a) jest taka sama jak b) i różna od 252, za te dwa podpunkty przyznajemy w sumie 3 pkt (i podpunkt c) oceniamy niezależnie na 0 lub 4 pkt).

4. (6 pkt) 90 (Za odp. 45 przyznajemy 4 pkt).

5. (24 pkt) kolejno wypisywane liczby są coraz mniejsze? 4 (4 pkt; za odp. 2 przyznajemy 2 pkt)

kolejno wypisywane liczby są coraz większe? 300 (3 pkt)

pierwsza wypisana liczba jest większa od drugiej, a druga od trzeciej? 100 (3 pkt)

pierwsza wypisana liczba jest większa od drugiej, a trzecia od pierwszej? 0 (3 pkt)

pierwsza wypisana liczba jest większa od trzeciej, a trzecia od drugiej? 200 (4 pkt)

pierwsza wypisana liczba jest większa od trzeciej, a druga od pierwszej? 300 (3 pkt)

druga wypisana liczba jest mniejsza od pierwszej,

trzecia od drugiej, a każda kolejna jest większa niż poprzednia? 33 (4 pkt)

6. (24 pkt) po 1 pkt: 9 (tak,) 911 100 (tak,) 554

44 nie 200 (tak,) 855

108 (tak,) 962 250 nie

Napisanie słowa „tak” nie jest konieczne, ale za samo „tak” (bez liczby) nie przyznajemy punktów.

6a. 2439 (5 pkt; dopuszczamy wyrażenie arytmetyczne o tej wartości, np. $9 \cdot 10^3 - 9^4$).

6b. 77 (5 pkt)

6c. dowolne dwie spośród: 177, 268, 277, 286, 348, 355, 377, 378, 379, 384, 387, 397, 438, 446, 464, 467, 476, 477, 483, 489, 498, 535, 553, 557, 575, 628, 644, 647, 668, 674, 677, 678, 682, 686, 687, 699, 717, 727, 737, 738, 739, 746, 747, 755, 764, 767, 768, 771, 772, 773, 774, 776, 777, 778, 783, 786, 787, 788, 793, 826, 834, 837, 843, 849, 862, 866, 867, 873, 876, 877, 878, 887, 894, 899, 937, 948, 969, 973, 984, 989, 996, 998, 999 (2+2 pkt)

6d. 24 (4 pkt)

* Ile liczb pięciocyfrowych ma ostateczny iloczyn cyfr równy 0? 75662

Punkty za podpunkt oznaczony * przyznajemy tylko przy rozstrzygnięciu remisów wśród laureatów.