XII KoALa (KOmbinatoryka-Algorytmika-Logika), 2026

Fundacja Matematyków Wrocławskich
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego
Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza w Poznaniu

Autorką ilustracji tytułowej jest Hanna Kuik, absolwentka V LO w Poznaniu.

Zabronione jest korzystanie z jakichkolwiek pomocy (w tym kalkulatorów, telefonów, komputerów itp.)!
Odpowiedzi umieść w pozostawionych przy pytaniach miejscach.
Liczby do 1024 powinny być wyliczone dokładnie, a większe mogą być podawane jako iloczyny (np. potęgi albo silnie) lub sumy maksymalnie czterech iloczynów.
Czas pracy: 45 min. Powodzenia!

kategoria „Senior” (szkoły ponadpodstawowe)

.....

imię i nazwisko, klasa

.....

nazwa szkoły (z miejscowością)

Zad. 1. (12 pkt) Konik szachowy bryka po kwadratowej szachownicy, której wiersze i kolumny numerowane są kolejno od 1 do n. Z pola o współrzędnych (w, k) może skoczyć na pola o współrzędnych $(w \pm 1,\ k \pm 2)$ lub $(w \pm 2,\ k \pm 1)$, gdzie znaki + i – można dobierać dowolnie. Nie są możliwe ruchy do wierszy ani kolumn o numerach spoza przedziału $[1, n]$.

W ilu najmniej ruchach konik może przemieścić się z pola $(1, 1)$ na (n, n), jeśli $n =$

99 …… 100 …… 101 ……

Jeśli uważasz, że takie przejście jest niemożliwe, wpisz 0.

Zad. 2. (21 pkt)

Ile jest podzielnych przez 8 liczb dziesięciocyfrowych o różnych cyfrach? …….

Liczba palindromiczna to taka, która czytana
od przodu i od tyłu wygląda tak samo.
Ile jest podzielnych przez 8 dziesięciocyfrowych liczb palindromicznych? …….

Ile jest podzielnych przez 15 dziesięciocyfrowych liczb palindromicznych? …….

Zad. 3. Na stole leży n kamyków. Ala i Barnaba grają w grę polegającą na zabieraniu na przemian ze stołu jednego kamyka lub połowy leżących tam kamyków (przy czym taki ruch jest niemożliwy, jeśli ich liczba jest nieparzysta). Pierwszy ruch wykonuje Ala, a wygrywa osoba, która zabierze ostatni kamyk.

3.1. (10 pkt) Ile ruchów minimalnie może liczyć rozgrywka, gdy: $n = 63$ ……

$n = 101$ …… n ma zapis dwójkowy 11100110001 ……

3.2. (12 pkt) Przez rozgrywkę możemy rozumieć ciąg liczb kamyków leżących na stole przed kolejnymi ruchami (np.: 26, 25, 24, 12, 6, 5, 4, 2, 1). Ile różnych rozgrywek jest możliwych dla $n =$

20 …… 21 …… 22 ……

3.3. (11 pkt) Dla jakich $n > 1$ Ala ma strategię wygrywającą i jaki powinien być jej pierwszy ruch, aby mogła zapewnić sobie wygraną niezależnie od ruchów Barnaby, jeśli będzie postępować właściwie?

Zad. 4. Oto definicja funkcji $f(x, y)$:

> do zmiennej k wpisz wartość x
> dopóki y nie dzieli się przez k, zwiększaj k o 1
> dopóki y dzieli się przez k, do zmiennej y wpisz wartość y/k
> jeśli $k < y$, wartością funkcji f dla podanych jej argumentów jest $1 + f(k + 1, y)$,
> w przeciwnym wypadku wartością funkcji f dla podanych jej argumentów jest k

4.1. (10 pkt) Ile wynosi: $f(2, 2^{99})$ = …… $f(3, 2^{99})$ = ……

$f(2, 6^{99})$ = …… $f(9, 99)$ = …… $f(10, 99)$ = ……

4.2. (12 pkt) Jeśli istnieje, podaj najmniejsze naturalne n, dla którego $f(2, n)$ wynosi:

11: …… 10: …… 8: ……

Jeśli nie ma takiego n, jako odpowiedź wpisz 0.

4.3. (12 pkt) Jeśli istnieje, podaj najmniejsze $n > 99$, dla którego $f(2, n)$ wynosi:

2: …… 5: …… 11: ……

Jeśli nie ma takiego n, jako odpowiedź wpisz 0.

Zad. 4* Ile jest takich $n < 2026$, że $f(2, n) = n$? …… (Punkty za to zadanie przyznamy tylko przy rozstrzyganiu remisów wśród laureatów).