

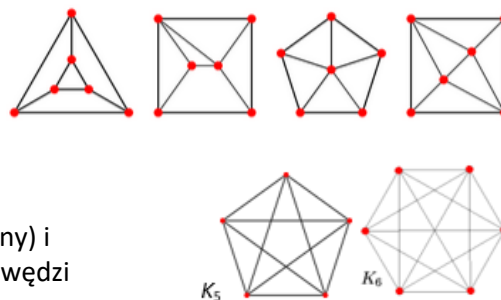
ELIMINACJE SZKOLNE
NUMERYCZNE REPREZENTACJE GRAFÓW – NOTATKI Z WYKŁADU

PLAN WYKŁADU

- 1) Co to jest graf, jakie ma elementy, jakie są rodzaje grafów
- 2) Stopień grafu i stopień wierzchołka grafu, podstawowe własności
- 3) Ciąg rzędów wierzchołków, lista sąsiedztwa, macierz sąsiedztwa
- 4) Kod Prüfera dla drzewa
- 5) Zliczanie grafów

Ad. 1. Teoria grafów to dział matematyki dyskretniej (XIX/XX wiek).

Graf to skończony układ punktów (**wierzchołków**) połączonych liniami (**krawędziami**). Zazwyczaj przedstawia się go w formie diagramu. Przykłady obok. Dla wygody wierzchołki grafu można nazwać kolejnymi literami lub liczbami. Przecięcie krawędzi nie jest wierzchołkiem (np. na poniższym rys. K_5 lub K_6).



Mówimy o grafach *nieskierowanych* (kierunek połączenia nie jest istotny) i *nieważonych* (każda krawędź ma długość 1), Grafy **proste** nie mają krawędzi wielokrotnych i pętli (wierzchołek nie łączy się sam ze sobą).

Jeśli w grafie są wszystkie możliwe krawędzie jednokrotne (każdy wierzchołek połączony jest z każdym innym), to graf nazywa się **pełny**. Przykłady obok to grafy pełne K_5 i K_6 .

Ćwiczenie. Jak wyglądają grafy pełne K_3 i K_4 ? Ile krawędzi ma K_{17} ?

Jeśli od jednego wierzchołka do innego trzeba przejść przez jedną lub kilka krawędzi, to takie przejście nazywamy **drogą**. **Długość drogi** to liczba krawędzi, z jakich ta droga się składa.

Grafy **spójne** (są w jednym kawałku) to takie,

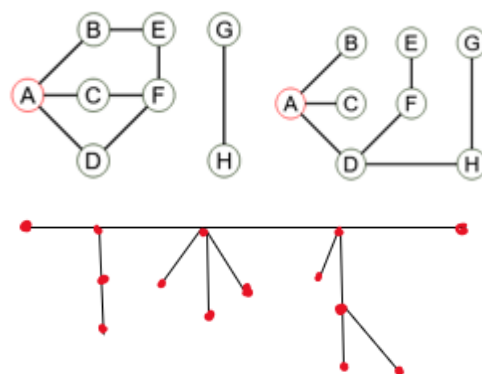
w których pomiędzy dowolnymi wierzchołkami istnieje droga.

Drogę, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku (i nie jest pętlą), nazywamy **cyklem**.

Drzewo to graf spójny, który nie ma cykli, inaczej mówiąc między dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje tylko jedna droga (nie ma innej drogi powrotnej, bo obie te drogi utworzyłyby cykl).

Przykłady obok. Pierwszy nie jest drzewem, bo nie jest spójny. Ponadto ma cykl, np. $ACFD$. Drugi jest drzewem (jest spójny i nie ma cyklu).

Przydatna intuicja: drzewo ma zawsze kształt gąsieniczki o różnych liczbach nóżek różnej długości (rys. trzeci obok).



Ad. 2. Rząd wierzchołka to liczba wychodzących z niego krawędzi. **Rząd grafu** to suma rzędów wszystkich jego wierzchołków. **Liść** grafu to wierzchołek rzędu 1. Czy może istnieć drzewo bez liści?

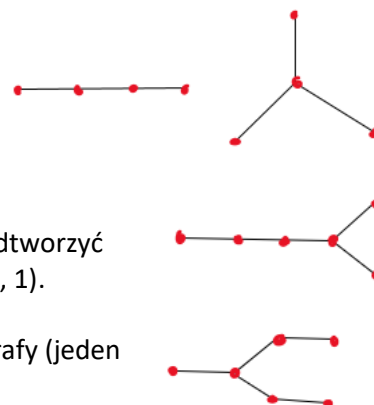
Ćwiczenie. Przeprowadzamy na powyższych przykładach, pytając o rzędy wierzchołków i rzędy grafów. W efekcie dochodzimy do poniższych wniosków (dla młodzików $w=17$).

- Rząd grafu wynosi tyle, co podwojona liczba jego krawędzi (bo każda krawędź jest do rzędu liczona 2 razy).
- Graf będący pojedynczym cyklem o w wierzchołkach ma rząd wierzchołka 2, a rząd grafu $2w$.
- Graf pełny o w wierzchołkach ma rząd wierzchołka $w-1$, a rząd grafu $w(w-1)$.
- W każdym grafie liczba wierzchołków rzędu nieparzystego jest parzysta (bo w przeciwnym razie rząd grafu byłby nieparzysty).
- W drzewie zawsze jest liść (wyjdźmy z wierzchołka, który nie jest liściem, i wędrujmy po krawędziach, nie wrócimy gdzie już byliśmy, a musimy skończyć, bo krawędzi jest skończenie wiele, skończymy w liściu).
A co będzie, jeśli wyruszymy z liścia?
- W drzewie zawsze są przynajmniej dwa liście. (rozumowanie j.w.)
- W drzewie wierzchołków jest o 1 więcej niż krawędzi (startując z liścia, z każdą krawędzią dorysujemy też wierzchołek).

Ad. 3. Graf to rysunek (diagram). Czy można nauczyć komputer rozpoznawania grafów? Musimy mieć inny (nierysunkowy) sposób przedstawienia grafu. Trzeba taki rysunek opisać w języku maszyn, np. za pomocą liczb. Ale jak? Jest na to kilka sposobów. Ważne, żeby z takiej maszynowej reprezentacji dało się odtworzyć rysunek grafu w sposób jednoznaczny.

Ćwiczenie. Czy wystarczy podać liczby w (wierzchołków) i k (krawędzi) grafu, żeby odtworzyć jego kształt? Odp. NIE.

Np. oba drzewa obok mają $w=4$ i $k=3$, a to przecież inne grafy (jeden ma wierzchołek rzędu 3, a drugi go nie ma).



Ćwiczenie. A może wystarczy podać rzędy wszystkich wierzchołków grafu, żeby odtworzyć jego kształt? W powyższym przykładzie byłyby to różne zapisy: (2, 2, 1, 1) i (3, 1, 1, 1).

Uwaga. podajemy rzędy wierzchołków grafu w kolejności malejącej. Odp. NIE.

Np. oba drzewa obok mają ciąg rzędów wierzchołków (3, 2, 2, 1, 1, 1), a to inne grafy (jeden ma liście połączone drogami długości 2 lub 4, a drugi 3 lub 4).

Ćwiczenie. Czy istnieją takie grafy? (1, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3), (3, 3, 3, 3)

Odp. N – rząd nieparz, T – 2 kreski, T – trójkąt, T – czworokąt, N – rząd nieparz, T – czworokąt z przekątnymi

Ćwiczenie. Czy można odtworzyć graf na podstawie poniższych zapisów? Co one mogą oznaczać?

A) {1:[2, 3, 4, 5], 2:[1, 3, 4], 3:[1, 2, 4], 4:[1, 2, 3, 5], 5:[1, 4]}

B) [(A, B), (A, C), (A, E), (B, C), (B, E), (C, D), (D, A), (E, C)]

C) 0 1 1 1

1 0 0 1

1 0 0 1

1 1 1 0

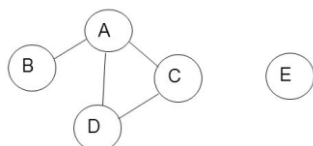
odp. A) Dla każdego wierzchołka podano listę jego **sąsiadów**, czyli wierzchołków, z którymi jest on połączony.

odp. B) Podano listę wszystkich krawędzi grafu.

odp. C) W tabeli także każdy wierzchołek ma podanych sąsiadów. Nazywamy ją **macierzą sąsiedztwa**.

Na skrzyżowaniu dwóch wierzchołków jedynki wskazują, że między nimi jest krawędź, a zera – że nie ma.

Ćwiczenie. Dla poniższego grafu zapisz jego listę sąsiedztwa i macierz sąsiedztwa.

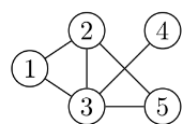


Odp.

A	B	C	D
A			
B	A		
C	AD		
D	AC		
E			

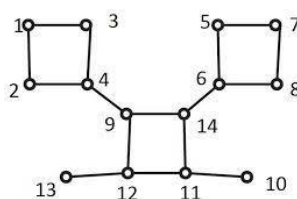
	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	0	0	0
C	1	0	0	1	0
D	1	0	1	0	0
E	0	0	0	0	0

Ćwiczenie. Napisz macierz sąsiedztwa dla grafów.



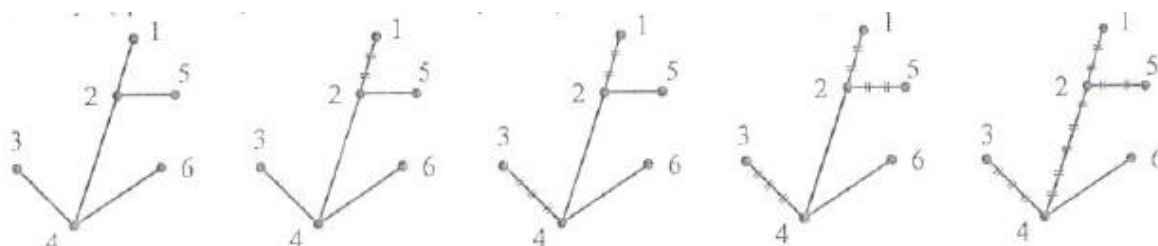
Odp.

0 1 1 0 0
1 0 1 0 1
1 1 0 1 1
0 0 1 0 0
0 1 1 0 0

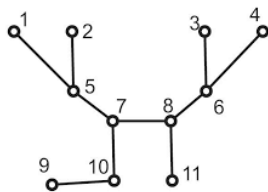


Ad 4. Drzewo o wierzchołkach ponumerowanych kolejnymi liczbami naturalnymi możemy jednoznacznie zakodować w postaci ciągu liczb nazywanego kodem Prüfera tego drzewa. Kod tworzymy następująco:

- Szukamy liścia o najniższym numerze.
- Skreślamy go i wychodzącą z niego krawędź, a numer wierzchołka na drugim końcu wpisujemy do kodu.
- Z nowym drzewem postępujemy podobnie aż otrzymamy tylko jedną krawędź. Przykład: <2, 4, 2, 4>

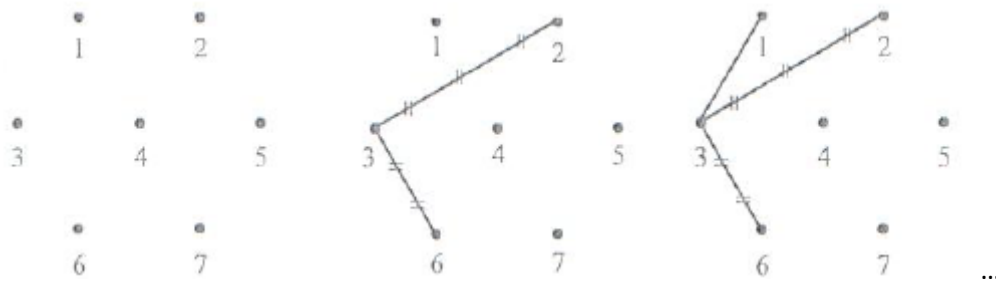


Ćwiczenie. Spróbuj z takim drzewem.

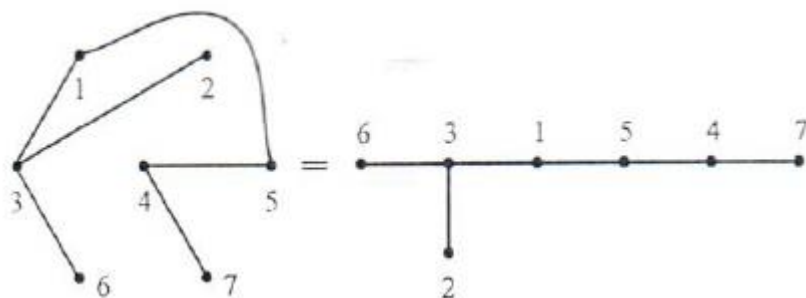


Odp. $\langle 5, 5, 6, 6, 7, 8, 10, 7, 8 \rangle$

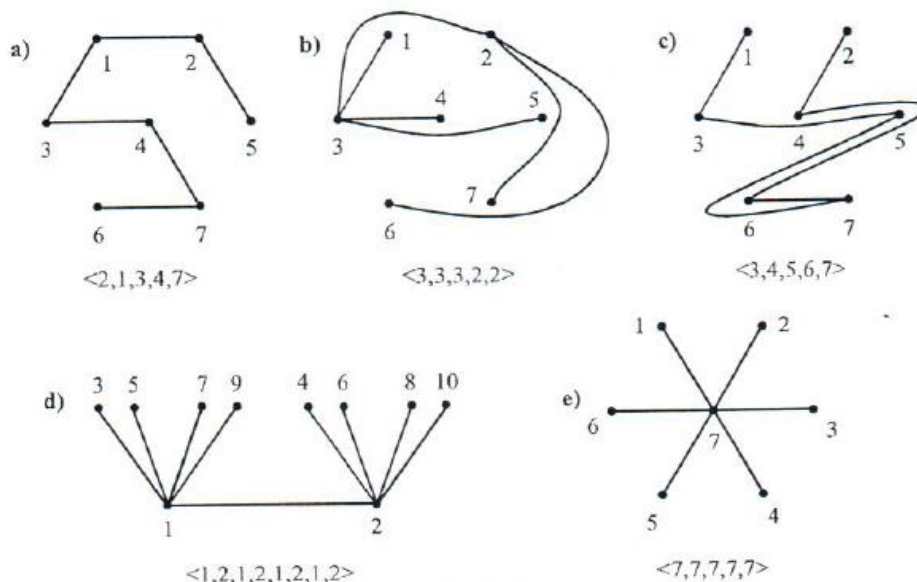
Trochę trudniej jest odtworzyć drzewo z kodu. Spróbujmy na przykładzie $\langle 3, 3, 1, 5, 4 \rangle$. Drzewo musi mieć 7 wierzchołków (z każdym skreślanym wierzchołkiem wpisujemy numer do kodu, poza ostatnią krawędzią). Zaznaczamy dowolnych 7 ponumerowanych punktów. Pierwszy był odcięty liść z najniższym numerem, ale nie 1, bo występuje w kodzie. Było to 2 i było połączone z 3 (zaznaczamy). Szukamy nowego liścia – najniższego niewystępującego w kodzie numeru – jest to 6 i było połączone z 3 (zaznaczamy). Jednocześnie wykreślamy zużyte wierzchołki z kodu i z zestawienia wierzchołków: $\langle 3, 3, 1, 5, 4 \rangle - (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Teraz najniższy numer, którego nie ma już w kodzie to 3 i było połączone z 1. Zaznaczamy i skreślamy: $\langle 3, 3, 1, 5, 4 \rangle - (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Najmniejszy numer niewystępujący w kodzie to 1 i połączony był z 5. Zaznaczamy i skreślamy: $\langle 3, 3, 1, 5, 4 \rangle - (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Z 4 połączony było 5: $\langle 3, 3, 1, 5, 4 \rangle - (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$. Pozostało 7, które łączymy z ostatnim z kodu wierzch. 4.



Ostatecznie dostajemy taki diagram:



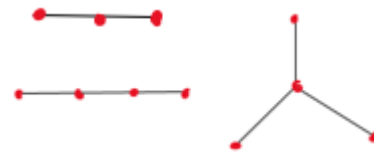
Ćwiczenie. Spróbuj z takimi kodami $\langle 2, 1, 3, 4, 7 \rangle$, $\langle 3, 3, 3, 2, 2 \rangle$, $\langle 3, 4, 5, 6, 7 \rangle$, $\langle 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \rangle$, $\langle 7, 7, 7, 7, 7 \rangle$.
Odp.



Z wykonanych przykładów wyciągamy wnioski dotyczące własności kodu Prüfera:

- Drzewo o n wierzchołkach ma kod długości $n-2$. (nie wpisujemy pierwszego i ostatniego wierzchołka).
- Jeśli numer wierzchołka występuje w kodzie k razy, to wierzchołek ma rząd $k+1$.
- Jeśli numer wierzchołka w ogóle nie występuje w kodzie, to wierzchołek ten jest liściem.

Ad. 5. Ile jest różnych drzew o 3 wierzchołkach? Różnych tzn. o różnych kształtach. Tylko jeden. A o 4 wierzchołkach – dwa (rys. obok). Dla większych liczb wierzchołków określenie liczby drzew jest coraz trudniejsze (np. dla $w=5$ drzew jest 3, dla $w=6$ jest ich 6, a dla $w=7$ – 11). Do dziś nie znaleziono ogólnego wzoru na liczbę drzew o w wierzchołkach.



Inaczej jest, jeśli nadamy wierzchołkom nazwy. Wtedy dla $w=3$ drzewa są trzy (każdy wierzchołek może być w środku), a dla $w=4$ drzew jest 16 (4 w postaci triodu – każdy wierzchołek może być w środku, oraz 12 w postaci odcinka – z 4 wybieram dwa wierzchołki środkowe [na 6 sposobów] i na 2 sposoby doklejam liście $6 \cdot 2 + 4 = 16$). Dla większych w zliczanie się komplikuje, ale możemy skorzystać z jednoznacznego kodowania Prüfera. Dla $w=4$ zliczamy napisy długości 2 złożone z liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Jest ich $4^2=16$. Dla $w=5$ napisów długości 3 jest $5^3=125$, itd. Drzew etykietowanych o w wierzchołkach jest w^{w-2} .

Ćwiczenie. Ile jest drzew o 7 wierzchołkach, w których:

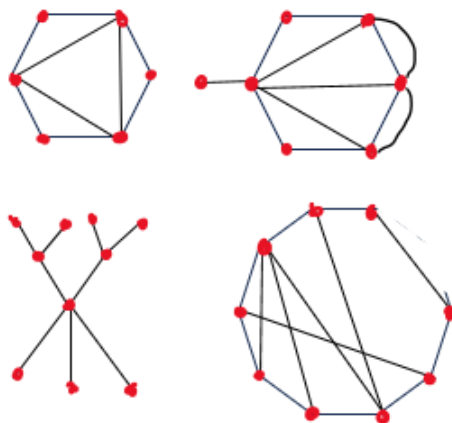
- wierzchołek o numerze 2 jest liściem? ODP. 6^5 (kody zawierają cyfry ze zbioru $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$)
- wierzchołek o numerze 2 ma rząd 4? ODP. $\binom{5}{3} \cdot 6^2$ (wybieram trzy miejsca na dwójki, pozostałe cyfry wybieram ze zbioru $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$)
- pewien wierzchołek ma rząd 3? ODP. $\binom{5}{2} \cdot 7 \cdot 6^3$ (wybieram dwa miejsca na powtarzającą się cyfrę ze zbioru od 1 do 7, pozostałe 3 miejsca obsadzam cyframi ze zbioru 6-elementowego, bo bez tej powtórzonej cyfry)

UWAGI ORGANIZACYJNE

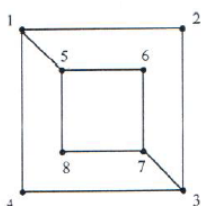
1. Czas trwania wykładu 45-60 min. Czas pisania zadań 45 min. Nie trzeba rozwiązać wszystkich zadań.
2. Nie używamy kalkulatorów.
3. Termin konkursu szkolnego: 29 XI (można zrobić 28. wykład, 29. zadania).
4. Odsyłanie wyników mejlem na adres: mikolaj@math.uni.wroc.pl do 5 XII. Wyniki 7 XII.
5. Wyniki przestać w pliku xls zgodnym ze wzorem zamieszczonym na stronie www konkursu.
6. W przypadku dużej liczby uczniów i dużego rozrzutu wyników nie trzeba wysyłać wszystkich nazwisk, ale należy w tabeli wyników podać całkowitą liczbę uczestników.
7. Prac nie trzeba przysyłać pocztą, ale należy je zachować do czasu ogłoszenia listy finalistów. W przypadku dużych odchyleń wyników z danej szkoły od średniej, możemy poprosić o przesłanie zeskanowanych prac.
8. Każdy podpunkt jest oceniany zero-jedynkowo. Nie ma połówek za częściowo poprawne odpowiedzi.
9. Finały w Instytucie Matematycznym UW, pl. Grunwaldzki 2, 50-384 Wrocław 14 XII, początek godz. 10:15, sala HS.

KLUCZ ODPOWIEDZI

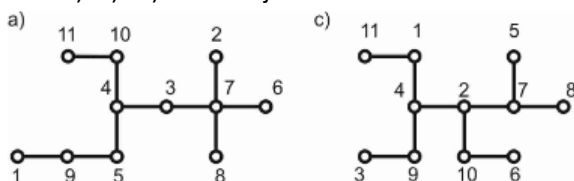
- 1) a) T, b) T, c) T, d) T
- 2) a) 2, b) 200, c) 99, d) 9900
- 3) a) N, b) N, c) T, d) T
- 4) a) pięciokąt, b) sześciokąt z głównymi przekątnymi,
c) czworokąt z nóżkami w przeciwległych wierzchołkach
d) trójkąt z jedną krawędzią podwójną,
e) pięciokąt z przekątną
f) nie istnieje (rzęd nieparzysty)
- 5) a) n -kąt, b) $n+1$ -kąt z wystawionym odcinkiem
w jednym wierzchołku, c) $n+2$ -kąt z jedną przekątną,
d) n -kąt „kolczasty” / z wystawionymi odcinkami / liśćmi
- 6) a), b), c), d)



- 7) 0 1 0 0 1 0
1 0 1 0 1 0
0 1 0 1 0 0
0 0 1 0 1 1
1 1 0 1 0 0
0 0 0 1 0 0



- 8) rys. powyżej
- 9) a) rząd, dodać/zsumować, b) liściem, 1/jedynka,
c) pełnego, jedynki, d) rzędy, jednakowe
- 10) a) (4, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 1, 3), b) (3, 10, 7, 1, 3, 3, 3, 3, 9)
- 11) b) i d) nie istnieje



- 12) a) 12, b) 7, c) 4, d) $\langle 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$
- 13) a) 6, b) $n+2$ i $n+1$, c) liściem, d) $2n+2$
- 14) a) $(n-2)(n-1)^{n-3}$, b) $\binom{n}{3}(n-3)^{n-2}$, c) n , d) $2\binom{n}{2}(n-2) = n(n-1)(n-2)$
- 15) a) $\binom{12}{3} \cdot 9 \cdot \binom{10}{1} \binom{9}{3} \binom{6}{3} = \binom{12}{3} \cdot 9 \cdot \frac{10!}{3!3!3!1!} = \binom{12}{4} \cdot 4 \cdot \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3}$
b) $\binom{12}{1} \binom{11}{1} \binom{10}{4} \cdot \binom{10}{4} \binom{6}{2} \cdot 4! = \binom{12}{1} \binom{11}{1} \binom{10}{4} \frac{10!}{4!2!1!1!1!1!}$

imię i nazwisko: szkoła:

Zad. 1. Wpisz TAK lub NIE w zależności od tego, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- a) Rząd grafu nie może być mniejszy od rzędu wierzchołka tego grafu.
- b) W grafie pełnym wszystkie wierzchołki mają takie same rzędy.
- c) Rząd grafu jest zawsze liczbą parzystą
.....
- d) Rząd grafu pełnego jest wielokrotnością liczby jego wierzchołków.
.....

Zad. 2. Uzupełnij luki liczbą, aby powstały zdania prawdziwe.

- a) Graf, który jest pojedynczym cyklem, ma wszystkie wierzchołki rzędu
.....
- b) Rząd grafu o 100 wierzchołkach, który jest pojedynczym cyklem wynosi
.....
- c) Graf pełny o 100 wierzchołkach ma wszystkie wierzchołki rzędu
.....
- d) Rząd grafu pełnego o 100 wierzchołkach wynosi
.....

Zad. 3. Wpisz TAK lub NIE w zależności od tego, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

- a) Każdy graf ma dwa liście.
.....
- b) Istnieje drzewo bez liści.
.....
- c) Istnieje graf, który ma same liście.
.....
- d) Istnieje drzewo o 1001 liściach.
.....

Zad. 4. Naskicuj graf **spójny** o podanym ciągu rzędów wierzchołków lub wpisz NIE ISTNIEJE.

- a) (2, 2, 2, 2, 2)
.....
- b) (3, 3, 3, 3, 3, 3)
.....
- c) (3, 3, 2, 2, 1, 1)
.....
- d) (3, 3, 2)
.....
- e) (3, 3, 2, 2, 2)
.....
- f) (3, 3, 3, 3, 3)
.....

Zad. 5. Opisz, jak wygląda graf **spójny, prosty** o danym ciągu rzędów wierzchołków.

- a) (2, 2, ..., 2, 2)
dwójka występuje n razy
- b) (3, 2, ..., 2, 1)
dwójka występuje n razy
- c) (3, 3, 2, ..., 2)
dwójka występuje n razy
- d) (3, ..., 3, 1, ..., 1)
trójek i jedynek jest po n

Zad. 6. Narysuj graf spójny o podanym ciągu rzędów wierzchołków lub wpisz NIE ISTNIEJE.

- a) (4, 4, 4, 2, 2, 2)
.....
- b) (6, 5, 5, 5, 2, 2, 1)
.....
- c) (5, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
.....
- d) (5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2)
.....

Zad. 7. Zapisz macierz sąsiedztwa podanego grafu.



Zad. 8. Narysuj graf o podanej macierzy sąsiedztwa.

```

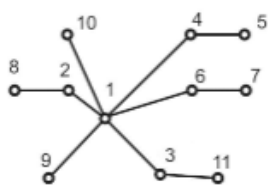
0 1 0 1 1 0 0 0
1 0 1 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 0 1 0
1 0 1 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 1 0 1 0
0 0 1 0 0 1 0 1
0 0 0 0 1 0 1 0

```

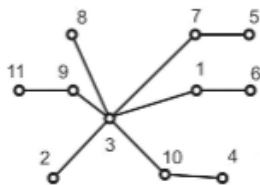
Zad. 9. Uzupełnij zdania jednym słowem, aby uzyskać twierdzenia prawdziwe.

- a) Aby obliczyć wierzchołka grafu, trzeba w macierzy sąsiedztwa liczby w odpowiadającej mu kolumnie.
- b) Jeśli wierzchołek jest grafu, to w odpowiadającej mu kolumnie stoi raz.
- c) Macierz sąsiedztwa grafu zawiera same poza przekątną.
- d) Jeśli kolumny macierzy sąsiedztwa dają te same sumy, to wierzchołków grafu są

Zad. 10. Zapisz kod Prüfera podanych drzew.



a)



b)

- a)
- b)

Zad. 11. Narysuj drzewo o podanym kodzie Prüfera lub wpisz NIE ISTNIEJE.

- a) $\langle 9, 7, 7, 7, 3, 4, 5, 4, 10 \rangle$
- b) $\langle 9, 7, 7, 7, 3, 10, 5 \rangle$
- c) $\langle 9, 7, 10, 7, 2, 4, 2, 4, 1 \rangle$
- d) $\langle 8, 7, 7, 7, 11, 5, 1 \rangle$

Zad. 12. Drzewo ma kod Prüfera $\langle 8, 1, 1, 1, 4, 3, 3, 4, 3, 7 \rangle$.

- a) Ile ma wierzchołków?
- b) Ile ma liści?
- c) Jaki rząd ma wierzchołek nr 3?
- d) Jak wygląda ciąg rzędów jego wierzchołków?

Zad. 13. Uzupełnij zdania.

- a) Jeśli w kodzie Prüfera wierzchołek nr n występuje 5 razy, to jego rząd jest równy
- b) Jeśli kod Prüfera ma długość n , to drzewo ma wierzchołków i krawędzi.
- c) Jeśli jakiś wierzchołek nie występuje w kodzie Prüfera, to jest on
- d) Jeśli drzewo ma kod Prüfera $\langle 1, 2, 3, \dots, n \rangle$, to jego rząd wynosi

Zad. 14. Ile jest drzew o wierzchołkach $\{1, 2, \dots, n\}$

- a) w których wierzchołek 1 ma rząd 2?
- b) o trzech liściach?
- c) o maksymalnym rzędzie wierzchołka $n-1$?
- d) o maksymalnym rzędzie wierzchołka $n-2$?

Zad. 15. Ile jest drzew o wierzchołkach $\{1, \dots, 12\}$ i podanym ciągu rzędów wierzchołków?

- a) $(4, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- b) $(5, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$