KONKURS MATEMATYCZNY KOMA 2022 **FINAŁ LO**

imię i nazwisko:.. szkoła: ....

W zadaniach 1-4 wpisz: S – skończenie wiele
P – przeliczalnie wiele
N – nieprzeliczalnie wiele

Zad. 1. Ile najwięcej elementów może mieć zbiór:

a) diagramów klasycznego sudoku 9×9? ....

b) rozłącznych kół na płaszczyźnie? ....

c) kul o ustalonym środku? ....

d) możliwych zadań z matematyki? ....

Zad. 2. Ile elementów ma zbiór możliwych:
a) podzbiorów uczestników KOMY 2022? ....

b) słów skończonych w alfabecie łacińskim (nawet jeśli nie mają sensu)? ....
c) punktów płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych? ....
d) skończonych rozgrywek szachowych? ....

Zad. 3. Ile elementów ma zbiór mozliwych:
a) ustawień figur szachowych na szachownicy 10×10? ....
b) funkcji kwadratowych o współczynnikach całkowitych? ....
c) obrotów kwadratu jednostkowego na płaszczyźnie? ....
d) parabol o miejscach zerowych x_1=0 i x_2=1? ....

Zad. 4. Ile elementów ma zbiór możliwych:
a) położeń wskazówek zegara? ....

b) poprawnych kodów w języku Python? ....

c) funkcji stałych o dziedzinie będącej zbiorem liczb wymiernych? ....
d) cyfr rozwinięcia liczby π? ....

e) liczb, które można zdefiniować w języku polskim używając słów, cyfr, symboli matematycznych? ....

Zad. 5. Czy to prawda?
a) Istnieje zbiór, który ma przeliczalnie wiele podzbiorów. TAK / NIE
b) Żaden zbiór nie może mieć mocy większej od continuum. TAK / NIE
c) Liczb niewymiernych jest continuum. TAK / NIE

d) Gdy do liczb naturalnych dołożymy zbiór nieskończony, liczba elementów nie zmieni się. TAK / NIE

Zad. 6. Czy $\aleph_0$ spełnia podane warunki?

a) $\aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0$ TAK / NIE
b) $\aleph_0-\aleph_0 = 0$ TAK/NIE
c) $3\cdot\aleph_0 > 2\cdot\aleph_0$ TAK / NIE
d) $\aleph_0\cdot\aleph_0 > \aleph_0$ TAK/NIE

Zad. 7. Czy podane zbiory są przeliczalne?

a) kwadraty liczb pierwszych TAK / NIE

b) rozwinięcia dziesiętne skończone TAK / NIE

c) potęgi dwójki lub trójki TAK / NIE

d) liczby wymierne z przedziału [0, 1] TAK / NIE

e) ciągi stałe TAK / NIE

Zad. 8. Podaj po dwa przykłady zbiorów liczbowych mających elementów:
a) mniej niż liczby naturalne ....

....

b) tyle samo co liczby naturalne ....

....

c) więcej niż liczby naturalne ....

....

d) możliwie najmniej ....

....

Zad. 9. Ustawiamy liczby całkowite w kolejności: 0, wszystkie liczby jednocyfrowe dodatnie, wszystkie liczby jednocyfrowe ujemne, wszystkie liczby 2-cyfrowe dodatnie, wszystkie liczby 2-cyfrowe ujemne itd. Numerujemy od 0. Jaka liczba stoi na miejscu:

a) 50 .... b) 150 ....

c) 109999 .... d) $2\cdot10^n$ ....

Zad. 10. Ustawiamy liczby całkowite w kolejności: 0, wszystkie liczby jednocyfrowe dodatnie, wszystkie liczby jednocyfrowe ujemne, wszystkie liczby 2-cyfrowe dodatnie, wszystkie liczby 2-cyfrowe ujemne itd. Numerujemy od 0. Na którym miejscu stoi liczba:

a) -50 .... b) 150 ....

c) 10^n .... d) -10^n ....

Zad. 11. Ustawiamy ułamki z przedziału (0, 1] w kolejności: $^{1}/_{1}$, $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{4}$, $^{3}/_{4}$, $^{4}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{2}/_{5}$, $^{3}/_{5}$, $^{4}/_{5}$, $^{5}/_{5}$, $^{1}/_{6}$ itd., numerując od 1. Na którym miejscu stoi:

a) $^{3}/_{6}$ .... b) $^{7}/_{9}$ ....

c) $^{5}/_{13}$ .... d) $^{12}/_{18}$ ....

Zad. 12. Ustawiamy ułamki z przedziału (0, 1]w kolejności: $^{1}/_{1}$, $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{4}$, $^{3}/_{4}$, , $^{4}/_{4}$, $^{1}/_{5}$, $^{2}/_{5}$, $^{3}/_{5}$, $^{4}/_{5}$, $^{5}/_{5}$ itd, numerując od 1. Jaki ułamek stoi na miejscu:

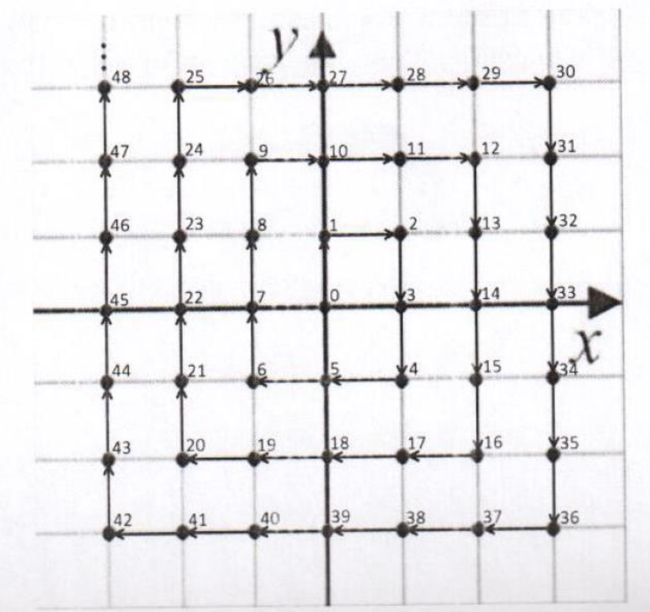
a) 25 .... b) 65 ....

c) 125 .... d) 225 ....

Zad. 13. Ustawiamy punkty kratowe (o współrzędnych całkowitych) w kolejności wskazanej na rysunku. Punkt o współrzędnych (0, 0) ma numer 0. Jaki punkt stoi na miejscu o numerze:

a) 50 .... b) 122 ....

c) 306 .... d) 350 ....



Zad. 14. Ustawiamy punkty kratowe w kolejności wskazanej na poprzednim rysunku. Jakie numery mają punkty o współrzędnych (dla $n>0$):

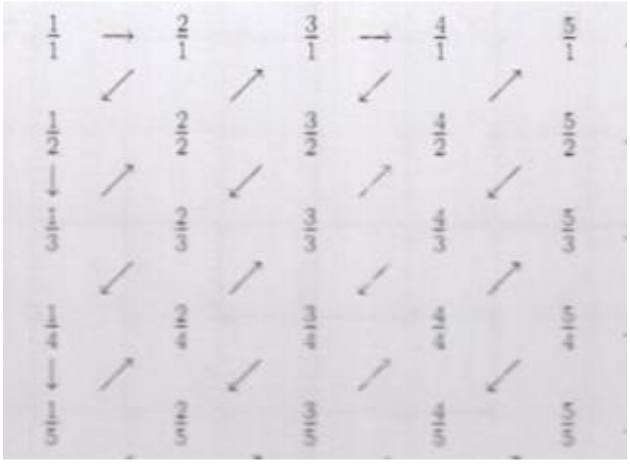
a) (n, n) .... b) $(-n, -n)$ ....

c) $(n, -n)$ .... d) $(-n, n+1)$ ....

Zad. 15. Ustawiamy dodatnie liczby wymierne w kolejności wskazanej na rysunku niżej (numerując od 1).

a) Który numer ma liczba $^{117}/_{3}$? ....

b) Jaki ułamek stoi na miejscu 117? ....



Zad. 16. W każdą lukę wpisz jedno słowo.

a) Liczb .... jest tyle samo co .... liczb naturalnych.

b) .... napisów złożonych z liter A lub B

jest tyle samo co liczb ....

c) .... liczb naturalnych jest więcej niż liczb wymiernych.

d) Liczb .... jest tyle samo, co .... kwadratu jednostkowego.

Zad. 17. W każdą lukę wpisz jedno słowo.

a) Zbiór .... elementów zbioru .... jest zbiorem przeliczalnym.

b) Różnica dwóch zbiorów .... jest zbiorem

.... lub ....

c) .... suma zbiorów przeliczalnych jest

zbiorem ....

d) Zbiór .... podzbiorów liczb .... jest przeliczalny.

Zad. 18. Zapisz bijekcję pomiędzy zbiorami *A* i *B*.

a) *A* = proste równoległe do osi *OX* na płaszczyźnie

B = zbiór liczb rzeczywistych ....

b) *A* = liczby naturalne podzielne przez 3

B = liczby naturalne niepodzielne przez 3 ....

....

c) *A* = [3, 4], *B*= (3, 4) ....

....

KLUCZ ODPOWIEDZI LO

1. a) S, b) P, c) N, d) P
2. a) S, b) P, c) P, d) S
3. a) S, b) P, c) N, d) N
4. a) N, b) P, c) N, d) S, e) P
5. a) N, b) N, c) T, d) N
6. a) T, b) N, c) N, d) N
7. a) T, b) T, c) T, d) T, e) N
8. a) np. {1, 2, 3}, b) np. liczby pierwsze, parzyste, wymierne, c) np. liczby rzeczywiste, niewymierne, punkty odcinka, d) zbiór pusty i nie ma drugiego przykładu (ew. $\varnothing$ i np. {1})
9. a) 41, b) -51, c) -10000, d) 10^n+1
10. a) 149, b) 249, c) $2\cdot 10^n-1$ (lub 199…99 liczba ma n dziewiątek), d) 10^{n+1} (lub 100…00 zer jest $n+1$)
11. a) 18, b) 43, c) 83, d) 165
12. a) $^4/_7$, b) $^{10}/_{11}$, c) $^5/_{16}$, d) $^{15}/_{21}$
13. a) (-2, 4), b) (-4, 6), c) (9, 9) d) (-9, -1)
14. a) $2n\cdot(2n-1)$, b)) $2n\cdot(2n+1)$, c) $(2n)^2 = 4n^2$, d) $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$
15. a) 7138, b) $^{12}/_4$
16. a) naturalnych, par (lub rzeczywistych, podzbiorów)
    b) nieskończonych, rzeczywistych (lub skończonych, naturalnych)
    c) podzbiorów, d) rzeczywistych, punktów
17. a) par/trójek, przeliczalnego, b) przeliczalnych/nieskończonych, przeliczalnym lub skończonym
    c) przeliczalna/skończona, przeliczalnym, d) skończonych, naturalnych/wymiernych
18. a) f(pr. y=c) = c, b) $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 \ dla \ n \ parz \\ \frac{n-3}{2} + 2 \ dla \ n \ nieparz \end{cases}$ lub $f(6k) = 3k+1$, $f(6k+3) = 3k+2$, $k\in N$,
    c) $f(x) = x$ dla $x\in(3, 4)\setminus\{a_n\}\setminus\{b_n\}$, gdzie $a_n = 3+{}^1/_n$, $b_n = 4-{}^1/_n$ dla n>2, $f(3) = a_3$, $f(a_n) = a_{n+1}$, $f(4)=b_3$, $f(b_n)=b_{n+1}$