FINAŁ
UŁAMKI FAREYA – NOTATKI Z WYKŁADU

- -

PLAN WYKŁADU

1) Definicja ciągu ułamków Fareya rzędu *n*, przykłady z porównywaniem.
2) Generowanie ciągu uporządkowanego z drzewa Sterna-Brocota. Mediant ułamków.
3) Własności ułamków Fareya.
4) Wykorzystanie ułamków Fareya do szacowania liczb niewymiernych.

(https://www.youtube.com/watch?v=0hlvhQZIOQw)

- -

Ad. 1. Definicja ciągu ułamków Fareya rzędu *n*: ciąg ułamków nieskracalnych z przedziału [0, 1], o mianownikach nie większych niż *n*, uporządkowane rosnąco. Przykłady.
Ciąg F_1 = {0/1, 1/1}. Dalej generowanie dla małych *n* na piechotę ze skracaniem i porównywaniem:
dla *n*=2 mamy 0/1, 1/1, 0/2, 1/2, 2/2, czyli po odrzuceniu skracalnych i uporządkowaniu {0/1, 1/2 , 1/1}.
Zrobić tak jeszcze F3 i F4.

Ad 2. Generowanie ciągu uporządkowanego z drzewa Sterna-Brocota na R+. Mediant sąsiednich ułamków *a*/*b* i *c*/*d* wynosi (*a*+*c*)/(*b*+*d*) i leży pomiędzy. Dowody:
* dlaczego jest nieskracalny?
* dlaczego każdy nieskracalny wystąpi i to dokładnie raz?

Ad 3. Własności ułamków Fareya.
* liczba ułamków rzędu *n* (poza F1 jest nieparzysta z 1/2 na środku, wzór addytywny)
* własność kolejnych trójek, mediant sąsiednich par, własność sąsiednich mianowników
* zaznaczanie w układzie współrzędnych i łamana porządku, rozbłysk Fareya
* interpretacja geometryczna porządku
* okręgi Forda

Ad. 4. Uzasadnić najlepsze szacowanie $\sqrt{(^1/_2)}$ ułamkiem o zadanym w mianowniku. Powiązać z reduktami ułamków łańcuchowych.

.

KLUCZ ODPOWIEDZI

1. a) 0/1, 1/2, 1/1 (0 lub 1, w ostatnim 2)
   b) 0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1
   c) 0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1
   d) 0/1, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 2/5, 3/7, 1/2, 4/7, 3/5, 2/3, 5/7, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 1/1
2. a) 23, b) 29, c) 47, d) 97 (0 lub 1)
3. a) 18, b) 12, c) 12, d) 52 (0 lub 1)
4. a) nic (0 lub 1)
   b) 0/1, 1/3, 2/5, 3/7, …, $n/(2n+1)$
   c) 0/1, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, …, ${}^{n-1}/n$
   d) 1/3, 3/8, 5/13, …, $n/(2{,}5n+0{,}5)$ dla nieparzystych n
5. a) 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, …, $1/n$ (0 lub 1)
   b) 1/1, 2/3, 3/5, 4/7, … $(n+1)$ / $(2n+1)$
   c) nic
   d) 1/2, 3/7, 5/12, …, $n/(2{,}5n–0{,}5)$ dla nieparzystych n
6. a) $n/(2n+1)$ (1+1+2)
   b) $n/(n+1)$ lub $(n–1)/n$
   c) $(2n+1)/(5n+3)$ lub $n/(2{,}5n+0{,}5)$ dla nieparzystych n lub $n/0{,}5(5n+1)$ dla nieparzystych n
7. a) $1/n$, (1+1+2)
   b) $(n+1)$ / $(2n+1)$,
   c) $(2n+1)$ / (5n+1) lub $n/(2{,}5n–0{,}5)$ dla nieparzystych n lub $n/0{,}5(5n–1)$ dla nieparzystych n
8. a) 1, b) $1/bd$, c) $b+d$, d) $(a+c)/(b+d)$ (0 lub 1)
9. a) środka/skraju, mianowniki (1 za każde słowo)
   b) q, mediantem
   c) Forda, styczny, 1/2, 1/3, 3/7, 3/8, 5/12, 5/13 itd. (jak w 4d lub 5d)
   d) nieskracalnego/Fareya, $1/(2q^2)$, $(p/q,\ 1/2q^2)$, sąsiadujących
10. rysunki na tablicy (0, 1 bez odbicia lub 2 z odbiciem)
11. a) 9 (0 lub 1) + rysunki na tablicy (0 lub 1)
12. a) T, b) T, c) N, d) T, e) N, f) N, g) N, h) T, i) N (0 lub 1)
13. a) 2/3 i 1/1, b) 2/3 i 3/4, c) 2/3 i 5/7, d) 7/10 i 5/7 (0, 1, 2)

imię i nazwisko:…………………………………………………………………………………… szkoła: ……………………………………………

Zad. 1. Zapisz ciągi ułamków Fareya podanych rzędów.

a) n=2 ……………………………………………………

b) n=3 ……………………………………………………

c) n=5 ……………………………………………………

…………………………………………………………………………………

d) n=7 ……………………………………………………

…………………………………………………………………………………

Zad. 2. Ile jest ułamków w ciągu Fareya rzędu n dla:

a) n = 8 ……………………………………………………………

b) n = 9 ……………………………………………………………

c) n = 12 ……………………………………………………………

d) n = 17 ……………………………………………………………

Zad. 3. O ile więcej ułamków Fareya jest w rzędzie**:**

a) 19 niż w 18 ……………………………………………………………

b) 21 niż w 20 ……………………………………………………………

c) 36 niż w 35 ……………………………………………………………

d) 53 niż w 52 ……………………………………………………………

Zad. 4. Podaj 3 różne ułamki sąsiadujące z lewej z danym ułamkiem w trzech wybranych rzędach F_n.

a) 0/1 ………………………………………………………………………

b) 1/2 ………………………………………………………………………

c) 1/1 ………………………………………………………………………

d) 2/5 ………………………………………………………………………

Zad. 5. Podaj 3 różne ułamki sąsiadujące z prawej z danym ułamkiem w trzech wybranych rzędach F_n.

a) 0/1 ………………………………………………………………………

b) 1/2 ………………………………………………………………………

c) 1/1 ………………………………………………………………………

d) 2/5 ………………………………………………………………………

Zad. 6. Podaj postać ogólną ułamka Fareya sąsiadującego z lewej z danym ułamkiem.

a) 1/2 ………………………………………………………………………

b) 1/1 ………………………………………………………………………

c) 2/5 ………………………………………………………………………

Zad. 7. Podaj postać ogólną ułamka Fareya sąsiadującego z prawej z danym ułamkiem.

a) 0/1 ………………………………………………………………………

b) 1/2 ………………………………………………………………………

c) 2/5 ………………………………………………………………………

Zad. 8. Dokończ zdania. Jeśli a/b i c/d są sąsiednimi ułamkami Fareya, to:

a) $b \cdot c - a \cdot d$ wynosi ………………………………………

b) ich dodatnia różnica wynosi ………………………………………

c) nowy ułamek pojawi się między nimi w rzędzie o numerze ………………………………………

d) ułamek, który pojawi się między nimi jako pierwszy, będzie wynosił ………………………………………

Zad. 9. Uzupełnij luki w zdaniach.

a) Ułamki Fareya leżące w jednakowych odległościach od ……………………. rzędu mają takie same ……………………

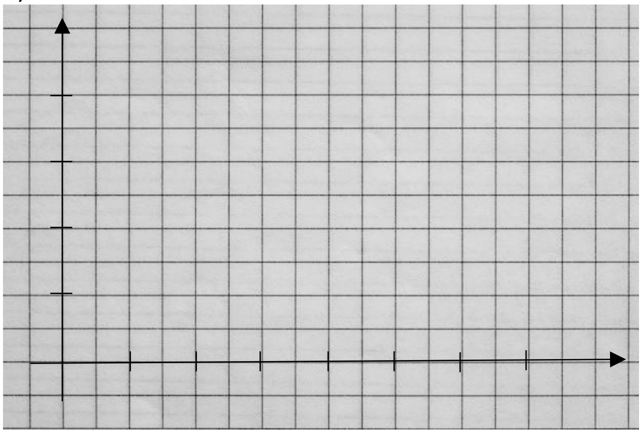
b) Jeśli ułamek Fareya p/q ma w rzędzie nr ………………. sąsiadów a/b i c/d, to jest ich ………………………………………

c) Okrąg ……………………………………. dla ułamka 2/5 jest ………………………….. do okręgów dla ułamków ……………., ……………………., ……………………… lub …………………………..

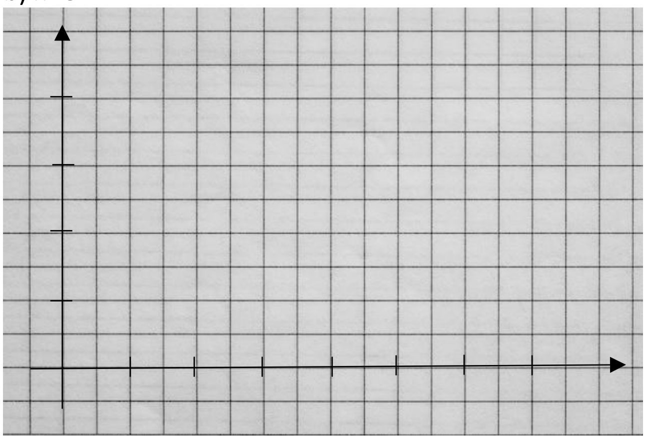
d) Dla każdego ułamka ………………………………………… p/q istnieje okrąg o promieniu ……………………………. i środku w punkcie (……………………., …………………….) styczny do okręgów ułamków …………………………………………………… z p/q w pewnym ciągu Fareya.

Zad. 10. Narysuj rozbłysk Fareya w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych dla podanych *n*.

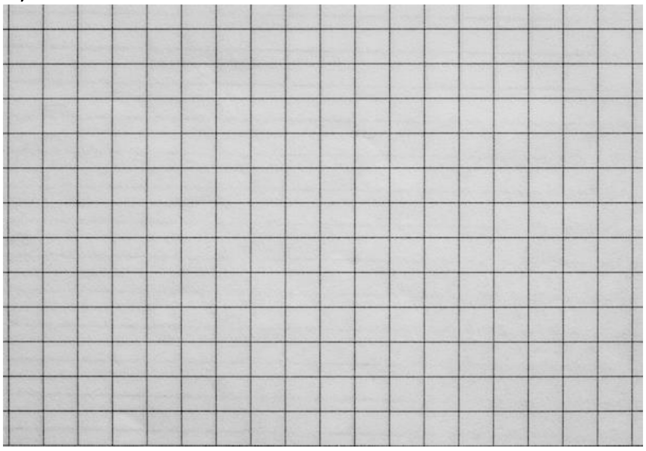
a) n=3



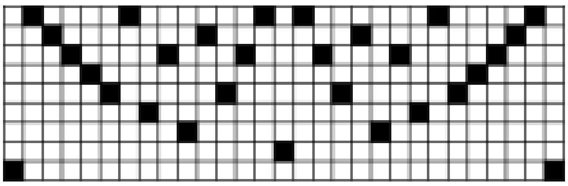
b) n=5



b) n=7

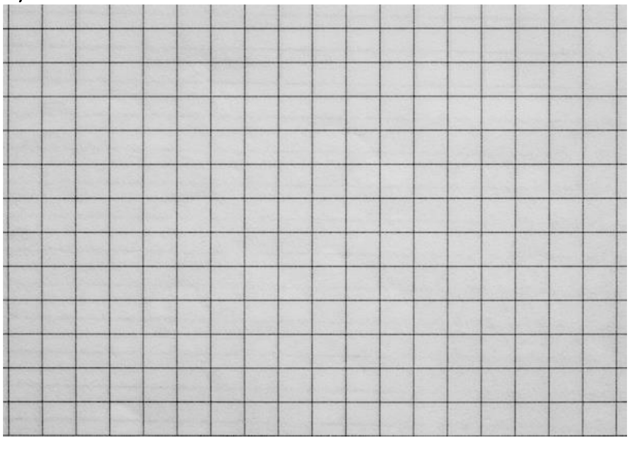


Zad. 11. Poniższy wzorek został utworzony przez mianowniki kolejnych ułamków Fareya.
Jakiego rzędu? ....



Narysuj analogiczny wzorek dla podanych rzędów.

a) n=5



Zad. 12. Wpisz TAK lub NIE w zależności od tego, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

a) Ułamki Fareya rzędu *n* zawierają ułamki rzędu n–1. ....

b) Wśród ułamków Fareya nie ma liczb, których licznik i mianownik są parzyste. ....

c) Kolejne ułamki Fareya nie mogą mieć tych samych mianowników. ....

d) Różnica liczb ułamków Fareya w rzędach *n*-tym i poprzednim jest wartością funkcji Eulera dla *n*. ....

e) Środkowy wyraz ciągu ułamków Fareya rzędu *n* jest taki sam dla wszystkich *n*. ....

f) Aby dostać mediant dwóch sąsiednich ułamków Fareya, dodaje się je tak, jak zwykłe ułamki. ....

g) Każdy mediant leży dokładnie w połowie między ułamkami, z których powstał. ....

h) Ułamki Fareya leżące w tych samych odległościach od środka rzędu sumują się do 1. ....

i) Okręgi Forda dla różnych ułamków Fareya są styczne i nigdy się nie przecinają. ....

Zad. 13. Podaj liczby wymierne najlepiej przybliżające liczbę $\sqrt{(^{1}/_{2})}$ o mianownikach nie większych niż podane.

a) m=3 .... < $\sqrt{(^{1}/_{2})}$ < ....

b) m=4 .... < $\sqrt{(^{1}/_{2})}$ < ....

c) m=7 .... < $\sqrt{(^{1}/_{2})}$ < ....

d) m=10 .... < $\sqrt{(^{1}/_{2})}$ < ....