

**FINAŁ**  
**UŁAMKI FAREYA – NOTATKI Z WYKŁADU**

**PLAN WYKŁADU**

- 1) Definicja ułamka, przykłady dla Młodzików.
- 2) Skracanie ułamków, liczby względnie pierwsze.
- 3) Porównywanie ułamków.
- 4) Definicja ciągu ułamków Fareya rzędu  $n$ , przykłady z porównywaniem.
- 5) Generowanie ciągu uporządkowanego z połowy drzewa Sterna-Brocota. Mediant ułamków.
- 6) Własności ułamków Fareya.

(dla LO)

- \* Definicja bez ograniczenia do przedziału  $[0, 1]$ , wizualizacja przez okręgi Forda (<https://www.youtube.com/watch?v=0h1vhQZIOQw>).
- \* Dowody. Zastosowanie.

**Ad 1.** Definicja ułamka: liczba z przedziału  $[0, 1]$  zapisana jako iloraz liczb naturalnych (licznik i mianownik lub w Młodzikach góra i dół). Młodzicy: co to znaczy  $2/7$  całości, rysunki pizz. Przykłady:  $1/2, 2/5, 18/42 = 9/21 = 3/7$  (rysunek).

**Ad 2.** Skracanie ułamków, ułamki nieskracalne, liczby względnie pierwsze, dla JUN/LO funkcja Eulera.

**Ad 3.** Porównywanie ułamków: na obrazku, przez porównanie liczników/mianowników, przez uzupełnienie do jedności, zasada mnożenia na krzyż.

**Ad 4.** Definicja ciągu ułamków Fareya rzędu  $n$ : ciąg ułamków nieskracalnych z przedziału  $[0, 1]$ , o mianownikach nie większych niż  $n$ , uporządkowane rosnąco. Ciąg  $F_1 = \{0/1, 1/1\}$ .

Generowanie dla małych  $n$  na piechotę ze skracaniem i porównywaniem: dla  $n=2$  mamy  $0/1, 1/1, 0/2, 1/2, 2/2$ , czyli po odrzuceniu skracalnych i uporządkowaniu  $\{0/1, 1/2, 1/1\}$ . Zrobić tak jeszcze  $F_3$  i  $F_4$ .

**Ad 5.** Generowanie ciągu uporządkowanego z drzewa Sterna-Brocota (w SP tylko fragment drzewa). Mediant sąsiednich ułamków  $a/b$  i  $c/d$  wynosi  $(a+c)/(b+d)$  i leży pomiędzy. Dlaczego jest nieskracalny? Dlaczego każdy nieskracalny wystąpi i to dokładnie raz?

**Ad 6.** Własności ułamków Fareya.

- \* liczba ułamków rzędu  $n$  (poza  $F_1$  jest nieparzysta z  $1/2$  na środku, wzór addytywny)
- \* własność kolejnych trójek, mediant sąsiednich par, własność sąsiednich mianowników
- \* zaznaczanie w układzie współrzędnych i łamana porządku, rozbłysk Fareya
- \* interpretacja geometryczna porządku
- \* Wzory symetryczne tworzone przez mianowniki.

**JUN, LO**

\* Wykorzystanie do szacowania liczb niewymiernych (typu  $1/\sqrt{2}$ ) zadaniem krokiem w mianowniku, jak to się ma do  $n$ -tych reduktów ułamka łańcuchowego

\* Dla każdego ułamka nieskracalnego  $p/q$  istnieje okrąg (Forda) o promieniu  $1/(2q^2)$  i środku w punkcie  $(p/q, 1/2q^2)$ . Dwa okręgi dla różnych ułamków są rozłączne lub styczne, nigdy się nie przecinają. Jeśli  $p/q < 1$ , to okręgi Forda styczne do okręgu dla ułamka  $p/q$  są okręgami ułamków będących sąsiadami  $p/q$  w pewnym ciągu Fareya.

## KLUCZ ODPOWIEDZI – MŁODZICY

1. a)  $2/3$ , b)  $2/3$ , c)  $1/38$ , d)  $2/5$  (0 lub 1)
2.  $13/33$ ,  $24/25$ ,  $99/100$  (1 lub -1)
3. a)  $3/14$ , b)  $7/8$ , c)  $1/3$ , d)  $123/234$  (0 lub 1)
4. 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 ( $1/2$  lub  $-1/2$ )
5. a) 2, b) 4, c) 4, d) 8 (0 lub 1)
6. a)  $0/1$ ,  $1/1$  (0 lub 1)  
b)  $0/1$ ,  $1/2$ ,  $1/1$   
c)  $0/1$ ,  $1/3$ ,  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $1/1$   
d)  $0/1$ ,  $1/5$ ,  $1/4$ ,  $1/3$ ,  $2/5$ ,  $1/2$ ,  $3/5$ ,  $2/3$ ,  $3/4$ ,  $4/5$ ,  $1/1$
7. a) 7, b) 13, c) 23, d) 43 (0 lub 1)
8. a) 18, b) 14, c) 12, d) 42 (0 lub 1)
9. a) nic (0 lub 1)  
b)  $0/1$ ,  $1/3$ ,  $2/5$ ,  $3/7$ , ...,  $n/(2n+1)$   
c)  $0/1$ ,  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $3/4$ ,  $4/5$ ,  $5/6$ , ...,  $n^{-1}/n$ , ...  
d)  $1/3$ ,  $3/8$ ,  $5/13$ , ...,  $n/(2,5n+0,5)$  dla nieparzystych  $n$
10. a)  $1/1$ ,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ , ...  $1/n$ , ... (0 lub 1)  
b)  $1/1$ ,  $2/3$ ,  $3/5$ ,  $4/7$ , ...,  $(n+1)/(2n+1)$ , ...  
c) nic  
d)  $1/2$ ,  $3/7$ ,  $5/12$ , ...,  $n/(2,5n-0,5)$  dla nieparzystych  $n$
11. 8,  $1/40$ ,  $5/13$ , 13 (0 lub 1)
12. rysunki na tablicy (0, 1 – bez odbicia lub 2)
13. a) T, b) T, c) N, d) T, e) N, f) T, g) T, h) N, i) N, j) N (0 lub 1)
14. a) 1, b)  $1/bd$ , c)  $b+d$ , d)  $(a+c)/(b+d)$  (0 lub 1)

## KLUCZ ODPOWIEDZI – JUNIORZY

1. a)  $2/3$ , b)  $1/38$ , c)  $2/5$ , d)  $3/7$  (0 lub 1)
2.  $13/33$ ,  $24/125$ ,  $27/566$  (1 lub -1)
3. a)  $3/114$ , b)  $117/118$ , c)  $1/3$ , d)  $123/234$  (0 lub 1)
4. 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ( $1/2$  lub  $-1/2$ )
5. a) 6, b) 4, c) 8, d) 52 (0 lub 1)
6. a)  $0/1$ ,  $1/2$ ,  $1/1$  (0 lub 1, w ostatnim 2)  
b)  $0/1$ ,  $1/3$ ,  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $1/1$   
c)  $0/1$ ,  $1/5$ ,  $1/4$ ,  $1/3$ ,  $2/5$ ,  $1/2$ ,  $3/5$ ,  $2/3$ ,  $3/4$ ,  $4/5$ ,  $1/1$   
d)  $0/1$ ,  $1/7$ ,  $1/6$ ,  $1/5$ ,  $1/4$ ,  $2/7$ ,  $1/3$ ,  $2/5$ ,  $3/7$ ,  $1/2$ ,  $4/7$ ,  $3/5$ ,  $2/3$ ,  $5/7$ ,  $3/4$ ,  $4/5$ ,  $5/6$ ,  $6/7$ ,  $1/1$
7. a) 2, b) 3, c) 7, d) 13 (0 lub 1)
8. a) 23, b) 29, c) 47, d) 97 (0 lub 1)
9. a) 18, b) 12, c) 12, d) 52 (0 lub 1)
10. a) nic (0 lub 1)  
b)  $0/1$ ,  $1/3$ ,  $2/5$ ,  $3/7$ , ...,  $n/(2n+1)$ , ...  
c)  $0/1$ ,  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $3/4$ ,  $4/5$ ,  $5/6$ , ...,  $n^{-1}/n$ , ...  
d)  $1/3$ ,  $3/8$ ,  $5/13$ , ...,  $n/(2,5n+0,5)$  dla nieparzystych  $n$
11. a)  $1/1$ ,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ , ...  $1/n$ , ... (0 lub 1)  
b)  $1/1$ ,  $2/3$ ,  $3/5$ ,  $4/7$ , ...,  $(n+1)/(2n+1)$ , ...  
c) nic  
d)  $1/2$ ,  $3/7$ ,  $5/12$ , ...,  $n/(2,5n-0,5)$  dla nieparzystych  $n$
12. rysunki na tablicy (0, 1 bez odbicia lub 2)
13. a) T, b) T, c) N, d) T, e) N, f) T, g) N, h) N, i) T, j) N (0 lub 1)
14. a) środka/skraj, mianowniki (0, 1, 2 lub 3)  
b) sąsiednimi, 1  
c) iloczynu, mianowników  
d) pierwszy,  $(a+c)/(b+d)$ ,  $b+d$

imię i nazwisko:..... szkoła: .....

**Zad. 1.** Zapisz ułamek w postaci nieskracalnej.

- a)  $22/33$  .....
- b)  $3/114$  .....
- c)  $28/70$  .....
- d)  $45/105$  .....

**Zad. 2.** Podkreśl ułamki nieskracalne.

15/51    13/33    24/125    99/108    27/566

**Zad. 3.** W każdej parze podkreśl większy ułamek.

- a)  $3/114$     i     $3/115$
- b)  $116/117$     i     $117/118$
- c)  $14/70$     i     $1/3$
- d)  $1/2$     i     $123/234$

**Zad. 4.** Podaj liczby naturalne mniejsze od 30 i względnie pierwsze z 30.

.....  
 .....

**Zad. 5.** Podaj wartość funkcji Eulera dla liczb:

- a) 7 .....
- b) 12 .....
- c) 15 .....
- d) 53 .....

**Zad. 6.** Zapisz ciągi Fareya podanych rzędów.

- a)  $n = 2$  .....
- b)  $n = 3$  .....
- c)  $n = 5$  .....
- d)  $n = 7$  .....

**Zad. 7.** Ile jest ułamków w ciągu Fareya rzędu  $n$  dla:

- a)  $n = 1$  .....
- b)  $n = 2$  .....
- c)  $n = 4$  .....
- d)  $n = 6$  .....

**Zad. 8.** Ile jest ułamków w ciągu Fareya rzędu  $n$  dla:

- a)  $n = 8$  .....
- b)  $n = 9$  .....
- c)  $n = 12$  .....
- d)  $n = 17$  .....

**Zad. 9.** O ile więcej ułamków Fareya jest w rzędzie:

- a) 19 niż w 18 .....
- b) 21 niż w 20 .....
- c) 36 niż w 35 .....
- d) 53 niż w 52 .....

**Zad. 10.** Podaj 3 różne ułamki sąsiadujące z lewej z danym ułamkiem w trzech wybranych rzędach  $F_n$ .

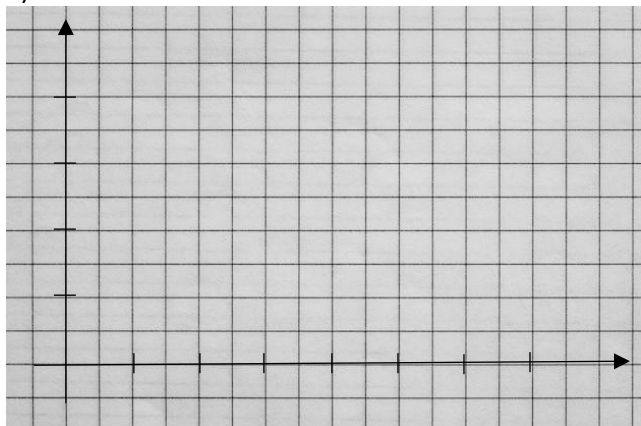
- a)  $0/1$  .....
- b)  $1/2$  .....
- c)  $1/1$  .....
- d)  $2/5$  .....

**Zad. 11.** Podaj 3 różne ułamki sąsiadujące z prawej z danym ułamkiem w trzech wybranych rzędach  $F_n$ .

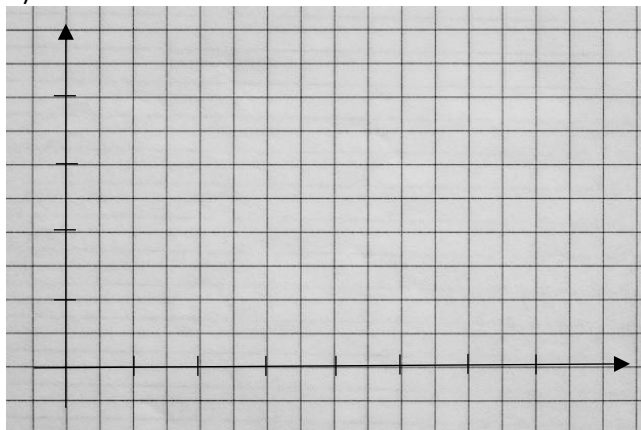
- a)  $0/1$  .....
- b)  $1/2$  .....
- c)  $1/1$  .....
- d)  $2/5$  .....

**Zad. 12.** Narysuj (na odwrocie tej kartki) rozbłysek Fareya w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych dla podanych  $n$ .

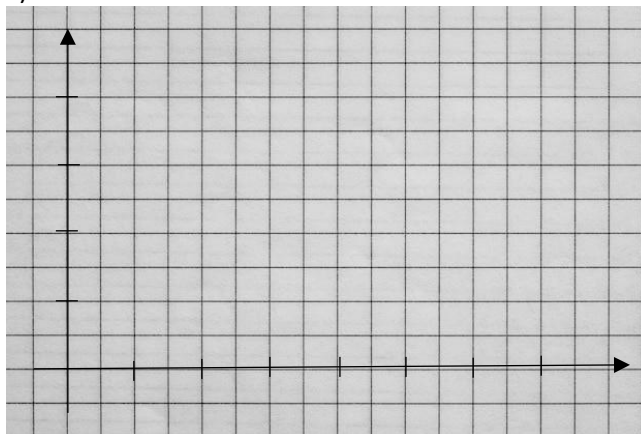
a)  $n = 1$



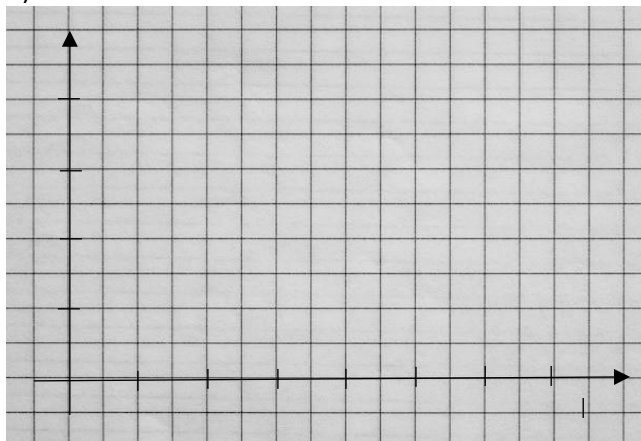
b)  $n = 2$



c)  $n = 3$



d)  $n = 5$



**Zad. 13.** Wpisz TAK lub NIE w zależności od tego, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

a) Ułamki Fareya rzędu  $n$  zawierają ułamki rzędu  $n-1$ . .....

b) Wśród ułamków Fareya nie ma liczb, których licznik i mianownik są parzyste. ....

c) Wśród ułamków Fareya nie ma liczb, których licznik i mianownik są nieparzyste. ....

d) Poza ułamkami Fareya z poprzedniego rzędu w rzędzie  $n$  pojawia się tyle nowych ułamków, ile wynosi wartość funkcji Eulera dla  $n$ . ....

e) Środkowy wyraz ciągu ułamków Fareya rzędu  $n$  jest taki sam dla wszystkich  $n$ . ....

f) Pierwszy i ostatni ułamek Fareya rzędu  $n > 1$  są takie same jak w poprzednich rzędach. ....

g) Aby dostać mediant dwóch sąsiednich ułamków Fareya, dodaje się je tak, jak zwykłe ułamki. ....

h) Różnica liczb ułamków Fareya w rzędach  $n$  i  $n-1$  jest taka jak ilość liczb względnie pierwszych z  $n$ . ....

i) Ułamki Fareya leżące w tych samych odległościach od środka rzędu sumują się do 1. ....

j) Każdy mediant leży dokładnie w połowie między ułamkami, z których powstał. ....

**Zad. 14.** Uzupełnij luki w zdaniach.

a) Ułamki Fareya leżące w jednakowych odległościach od ..... rzędu mają takie same .....

b) Jeśli  $a/b$  i  $c/d$  są ..... ułamkami Fareya, to  $b \cdot c - a \cdot d$  jest równe .....

c) Jeśli  $a/b$  i  $c/d$  są sąsiednimi ułamkami Fareya, to ich dodatnia różnica jest odwrotnością ..... ich .....

d) Jeśli  $a/b$  i  $c/d$  są sąsiednimi ułamkami Fareya, to jako ..... pojawi się między nimi ułamek ..... w rzędzie .....

imię i nazwisko:..... szkoła: .....

**Zad. 1.** Zapisz ułamek w postaci nieskracalnej.

- a)  $4/6$  .....
- b)  $22/33$  .....
- c)  $3/114$  .....
- d)  $28/70$  .....

**Zad. 2.** Podkreśl ułamki nieskracalne.

$12/100$     $15/51$     $13/33$     $24/25$     $99/100$     $27/66$

**Zad. 3.** W każdej parze podkreśl większy ułamek.

- a)  $3/14$       i       $3/15$
- b)  $6/7$       i       $7/8$
- c)  $14/70$     i       $1/3$
- d)  $1/2$       i       $123/234$

**Zad. 4.** Podaj liczby naturalne mniejsze od 15 i względnie pierwsze z 15.

.....

**Zad. 5.** Ile jest liczb naturalnych mniejszych od  $n$  i względnie pierwszych z  $n$  dla:

- a)  $n=3$  .....
- b)  $n=5$  .....
- c)  $n=12$  .....
- d)  $n=15$  .....

**Zad. 6.** Zapisz ciągi Fareya rzędu:

- a) 1 .....
- b) 2 .....
- c) 3 .....
- .....
- d) 5 .....
- .....

**Zad. 7.** Ile jest ułamków w ciągu Fareya rzędu  $n$  dla:

- a)  $n = 4$  .....
- b)  $n = 6$  .....
- c)  $n = 8$  .....
- d)  $n = 11$  .....

**Zad. 8.** O ile więcej ułamków Fareya jest w rzędzie:

- a) 19 niż w 18 .....
- b) 21 niż w 20 .....
- c) 36 niż w 35 .....
- d) 43 niż w 42 .....

**Zad. 9.** Podaj 3 różne ułamki sąsiadujące z lewej z danym ułamkiem w trzech wybranych rzędach  $F_n$ .

- a)  $0/1$  .....
- b)  $1/2$  .....
- c)  $1/1$  .....
- d)  $2/5$  .....

**Zad. 10.** Podaj 3 różne ułamki sąsiadujące z prawej z danym ułamkiem w trzech wybranych rzędach  $F_n$ .

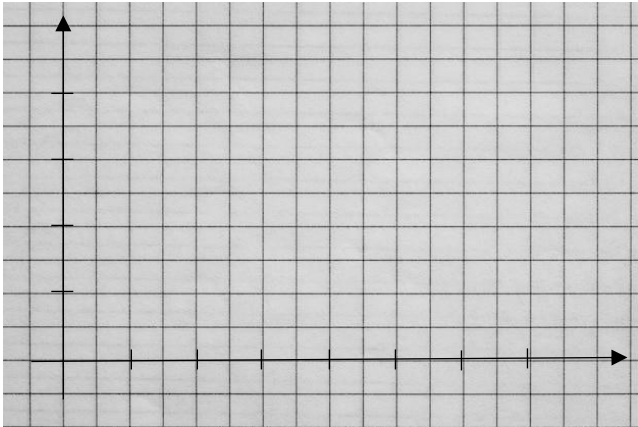
- a)  $0/1$  .....
- b)  $1/2$  .....
- c)  $1/1$  .....
- d)  $2/5$  .....

**Zad. 11.** Uzupełnij luki w zdaniach.

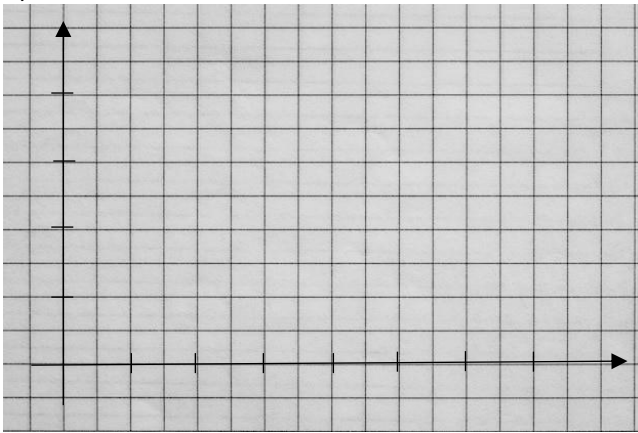
$3/8$  i  $2/5$  sąsiadują po raz pierwszy w rzędzie ..... ułamków Fareya. Po odjęciu mniejszego od większego otrzymamy ..... Pierwszy ułamek, jaki pojawia się między nimi wynosi ..... i po raz pierwszy znajdziemy go w rzędzie .....

**Zad. 12.** Narysuj na odwrocie rozbłysk Fareya w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

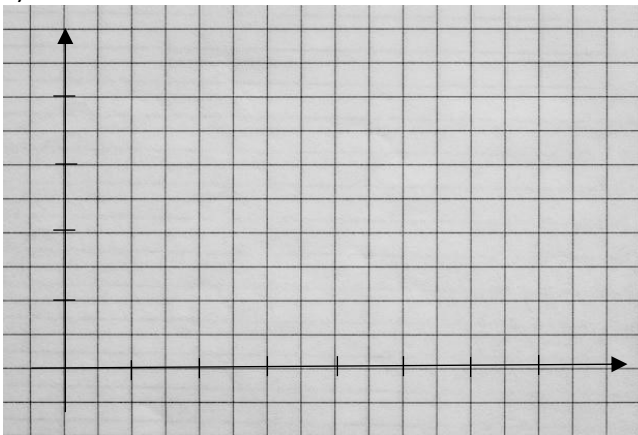
a)  $n = 1$



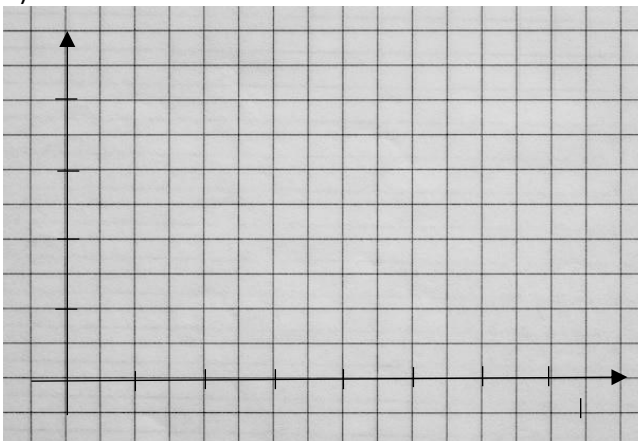
b)  $n = 2$



c)  $n = 3$



d)  $n = 5$



**Zad. 13.** Wpisz TAK lub NIE w zależności od tego, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

a) Wszystkie ułamki Fareya poprzedniego rzędu pojawiają się w następnym rzędzie. ....

b) Wśród ułamków Fareya nie ma liczb, których licznik i mianownik są parzyste. ....

c) Wśród ułamków Fareya nie ma liczb, których licznik i mianownik są nieparzyste. ....

d) Ułamki Fareya rzędu 6 zawierają wszystkie ułamki rzędu 5 oraz  $1/6$  i  $5/6$ . ....

e) Środkowy wyraz ciągu ułamków Fareya jest zawsze równy  $1/2$ . ....

f) Pierwszy i ostatni ułamek Fareya w każdym rzędzie są takie same jak w rzędzie poprzednim. ....

g) Drugi i przedostatni ułamek Fareya w każdym rzędzie sumują się do 1. ....

h) Ułamki Fareya leżące w tych samych odległościach od środka rzędu mają jednakowe liczniki. ....

i) Aby z sąsiednich ułamków Fareya otrzymać ułamek, który w następnym rzędzie pojawi się między nimi, dodaje się ich liczniki i wpisuje do licznika nowego ułamka oraz dodaje się ich mianowniki i wpisuje do mianownika nowego ułamka. ....

j) Każdy mediant leży dokładnie w połowie między ułamkami, z których powstał. ....

**Zad. 14.** Dokończ zdania.

Jeśli  $a/b$  i  $c/d$  są sąsiednimi ułamkami Fareya, to:

a)  $b \cdot c - a \cdot d$  wynosi .....

b) po odjęciu mniejszego od większego z nich otrzymamy .....

c) nowy ułamek pojawi się między nimi w rzędzie o numerze .....

d) ułamek, który pojawi się między nimi jako pierwszy, będzie wynosił .....