Obozowa liga zadaniowa (seria I – wskazówki)

1. Rozstrzygnij, która liczba jest większa: 2^{29} czy 3^{21} ?

$$2^{29} < 2^{30} = 8^{10} < 9^{10} = 3^{20} < 3^{21} .$$

2. Rozstrzygnij, która liczba jest większa: 2^{81} czy 3^{49} ?

$$2^{81} > 2^{80} = 256^{10} > 243^{10} = 3^{50} > 3^{49} .$$

3. W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A, B, C mają odpowiednio miary $10°$, $30°$ i $140°$. Punkt D leży na boku AC, a przy tym $CD = BC$. Punkt E jest środkiem boku AB. Wyznacz miarę kąta $\sphericalangle AED$.

Poprowadźmy odcinek BD. Wówczas trójkąt BCD jest równoramienny i w konsekwencji $\sphericalangle BDC = \sphericalangle CBD = 20°$.

Wobec tego $\sphericalangle ABD = 10°$ i trójkąt ABD jest równoramienny, a środkowa ED jest jego wysokością.

Odpowiedź: Kąt $\sphericalangle AED$ jest prosty (ma miarę $90°$).

Obozowa liga zadaniowa (seria II – wskazówki)

4. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$xyz \leqslant 10^{10} \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right) .$$

Nie, np. nierówność jest fałszywa dla $x=y=z=10^{11}$.

5. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$xyz \leqslant 10^{10} \cdot \left(x^4+y^4+z^4\right) .$$

Nie, np. nierówność jest fałszywa dla $x=y=z=\dfrac{1}{10^{11}}$.

6. W trójkącie ABC kąty przy wierzchołkach A, B, C mają odpowiednio miary 10°, 20° i 150°. Punkt D leży na boku AB, przy czym $AD=BC=1$. Oblicz długość odcinka CD.

Wybieramy taki punkt E na boku AB, że $\sphericalangle BCE=140^\circ$. Wtedy trójkąty BCE i ACE są równoramienne i w konsekwencji $BC=CE=AE$. Wobec tego $D=E$.

Odpowiedź: Odcinek CD ma długość 1.

Obozowa liga zadaniowa (seria III – wskazówki)

7. W trójkącie równoramiennym o podstawie długości 1 i ramionach długości 2 opuszczono wysokość z jednego z wierzchołków podstawy na przeciwległe ramię trójkąta. Oblicz długość tej wysokości.

Wysokość trójkąta opuszczona na bok długości 1 ma długość (tw. Pitagorasa)

$$h_1 = \sqrt{2^2 - (1/2)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}\,.$$

Ze wzoru na pole trójkąta (połowa iloczynu wysokości i podstawy) otrzymujemy długość wysokości opuszczonej na bok długości 2:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}\,.$$

Odpowiedź: Szukana wysokość jest równa $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

8. W trójkącie o bokach długości 7, 8 i 9 opuszczono wysokość na bok długości 8. Oblicz długość tej wysokości.

Niech spodek wysokości dzieli bok długości 8 na odcinki długości x (od strony boku długości 7) i $8-x$ (od strony boku długości 9). Wówczas szukana długość wysokości jest równa (tw. Pitagorasa)

$$h = \sqrt{7^2 - x^2} = \sqrt{9^2 - (8-x)^2}\,.$$

Podnosimy obustronnie do kwadratu prawą równość w celu wyznaczenia x:

$$49 - x^2 = 81 - 64 + 16x - x^2\,,$$

$$32 = 16x\,,$$

$$x = 2\,.$$

Odpowiedź: Szukana wysokość jest równa $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

9. Rozstrzygnij, czy z kartki papieru w kształcie kwadratu o boku 11 można wyciąć 5 kwadratów o boku 4.

Można.

Wycinamy 4 kwadraty z czterech rogów, a piąty ze środka (obrócony o 45°). Ten piąty kwadrat może mieć nawet bok długości

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4\,.$$

Obozowa liga zadaniowa (seria IV – wskazówki)

10. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$2\sqrt{2}\cdot xyz^2 \leqslant x^4+y^4+z^4\,.$$

Stosujemy dwukrotnie nierówność $2ab \leqslant a^2+b^2$:

$$2\sqrt{2}\cdot xyz^2 = 2\cdot\left(\sqrt{2}\cdot xy\right)\cdot\left(z^2\right) \leqslant 2x^2y^2+z^4 \leqslant x^4+y^4+z^4\,.$$

11. Rozstrzygnij, czy dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z zachodzi nierówność

$$3\cdot xyz^2 \leqslant x^4+y^4+z^4\,.$$

Nie, nie dla każdych.

Z rozwiązania poprzedniego zadania wynika, że w tamtej nierówności zachodzi równość, gdy $\sqrt{2}\cdot xy = z^2$ oraz $x=y$, np. dla $x=y=1$ i $z=\sqrt[4]{2}$.

Dla powyższych x, y, z dana w zadaniu nierówność przyjmuje postać

$$3\sqrt{2} \leqslant 4\,,$$

jest więc fałszywa.

Inne rozwiązanie: Dla $x=y=3$ i $z=4$ dana nierówność przyjmuje postać

$$432 \leqslant 418\,.$$

12. W trójkącie o bokach długości a, b, c kąt między bokami długości a i b ma miarę 150°. Udowodnij, że wówczas

$$c^2 = a^2+\ldots ab+b^2\,.$$

W miejsce kropek wpisz odpowiednią liczbę (niezależną od a, b, c).

Niech h będzie długością wysokości trójkąta opuszczonej na przedłużenie boku długości a. Wówczas $h=b/2$ (trójkąt prostokątny o kącie 30°) i wobec tego z tw. Pitagorasa

$$c=\sqrt{h^2+\left(a+\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{b^2+\left(2a+b\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{b^2+4a^2+4ab\sqrt{3}+3b^2}}{2}=$$

$$=\sqrt{a^2+\sqrt{3}\cdot ab+b^2}\,.$$

W miejsce kropek należy wpisać liczbę $\sqrt{3}$.

Obozowa liga zadaniowa (seria V – wskazówki)

13. Dane są liczby całkowite dodatnie m i n. Udowodnij, że jeżeli liczba mn jest podzielna przez 27, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez 9.

Gdyby każda z liczb m, n miała w rozkładzie na czynniki pierwsze co najwyżej jedną trójkę, to liczba mn miałaby co najwyżej dwie trójki i nie byłaby podzielna przez 27.

14. Dane są liczby całkowite dodatnie m i n. Udowodnij, że jeżeli liczba mn^2 jest podzielna przez 128, to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez 8.

Gdyby każda z liczb m, n miała w rozkładzie na czynniki pierwsze co najwyżej dwie dwójki, to liczba mn^2 miałaby co najwyżej sześć dwójek i nie byłaby podzielna przez 128.

15. Sześciokąt równokątny $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg o promieniu 7. Wiadomo, że $AB=2$. Oblicz długość boku BC.

Sześciokąt równokątny wpisany w okrąg ma co drugi bok tej samej długości, czyli $AB=CD=EF=2$ oraz $BC=DE=FA$. Ponadto trójkąt ACE jest równoboczny i jako wpisany w okrąg o promieniu 7 ma bok długości $7\sqrt{3}$, a więc w szczególności $AC=7\sqrt{3}$.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B ma miarę 120° (jak każdy kąt danego sześciokąta), a więc

$$AB^2+AB\cdot BC+BC^2=AC^2\,,$$

czyli po oznaczeniu $b=BC$ i podstawieniu znanych wartości:

$$\begin{aligned} 4+2b+b^2&=147\,,\\ 1+2b+b^2&=144\,,\\ (b+1)^2&=144\,,\\ b+1&=\pm 12\,,\\ b+1&=12\,, &&\text{(bo } b>0\text{)}\\ b&=11\,. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Bok BC ma długość 11.