

XXIX ZIMOWA SZKOŁA MATEMATYKI

Metoda Monte Carlo

Oznaczenia: Wielkimi literami oznaczamy zmienne losowe, małymi - stałe. $\mathbb{E}[X]$, $Var(X)$ - odpowiednio wartość oczekiwana i wariancja zm. losowej X .

$\mathcal{U}(a, b)$ - rozkład jednostajny na odcinku (a, b) , $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ - rozkład normalny o średniej μ i wariancji σ^2 .

Jeżeli nie napisano inaczej, o wszystkich zmiennych na tej liście zakładamy, że ich wartości oczekiwane i wariancje istnieją i są skończone.

1. Oblicz wartości oczekiwane i wariancje dyskretnych zmiennych losowych o rozkładach:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

2. Niech $c \in \mathbb{R}$. Pokaż, że:

(a) $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$

(b) $\mathbb{E}[c \cdot X] = c \cdot \mathbb{E}[X]$

(c) $Var(X + c) = Var(X)$

(d) $Var(c \cdot X) = c^2 \cdot Var(X)$

Na początku pokaż to dla zmiennych losowych dyskretnych. Spróbuj uogólnić na zmienne ciągłe.

3. Rozważmy zmienną losową X o rozkładzie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & 2^n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots & \frac{1}{2^{n+1}} & \dots \end{pmatrix}$. Pokaż, że istotnie jest to zmienna losowa (tzn. spełnia obydwie podane warunki). Następnie spróbuj obliczyć jej wartość oczekiwaną. Wywnioskuj, że $\mathbb{E}[X] = \infty$. (W rachunku prawdopodobieństwa dopuszczamy takie zmienne!).
4. Niech zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(2, 4)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że $X \in (-4, 8)$?
5. Niech zmienna losowa X ma średnią 3 i wariancję 5 i niech X_1, X_2, \dots, X_{10} będą jej niezależnymi kopiami. Jaki rozkład wg centralnego twierdzenia granicznego będzie w przybliżeniu miała zmienna $\sum_{i=1}^{10} X_i$?
6. Dokładność eksperymentu przeprowadzonego metodą Monte Carlo zależy od liczby prób N . Przypomnij sobie informację, jak maleje błąd w zależności od N . Jak zmieni się błąd, jeżeli zwiększymy N czterokrotnie? A szesnastokrotnie?