UNIWERSYTET GDAŃSKI · BEZROUTYNY · Uniwersytet Wrocławski · fundacja matematyków wrocławskich · UAM · Poznańska Fundacja Matematyczna

MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY GIMNAZJALISTÓW
DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE – WIELKOPOLSKA
Poznań, 13 czerwca 2018 r.

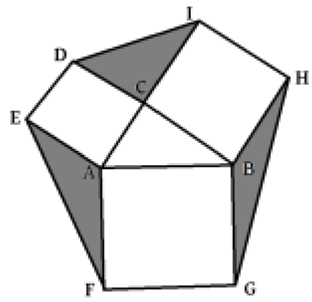
Zad. 1. Po napadzie na bank przesłuchiwanych było pięciu podejrzanych. Poniżej podane są zeznania każdego z nich. Policja wie, że każdy z nich raz powiedział prawdę i raz skłamał. Na podstawie zeznań ustal, kto napadł na bank.
• Boguś powiedział: To nie był Czesiek. To był Adam.
• Darek powiedział: To był Czesiek. To nie był Adam.
• Czesiek powiedział: To był Boguś. To nie był Egon.
• Adam powiedział: To był Egon. To nie był Boguś.
• Egon powiedział: To był Darek. To był Adam.

Zad. 2. Małżeństwo miało trójkę dzieci: Jasia, Bronka oraz Małgosię, z których każde skończyło roczek. Wiek każdego z członków rodziny wyrażany w latach, był liczbą całkowitą dodatnią. Różnica wieku między małżonkami była taka sama jak między Jasiem i Bronkiem i taka sama jak między Bronkiem i Małgosią. Wiek Jasia i Bronka po pomnożeniu dawał wiek ojca, zaś wiek Bronka i Marysi po wymnożeniu dawał wiek ich matki. Suma liczby lat całej piątki wynosiła 90. Ile lat ma każdy z członków rodziny?

Zad. 3. Suma liczb od 1 do 101:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 + 101$$

wynosi 5151. Niektóre znaki dodawania zastępujemy znakami odejmowania, tak by otrzymać wynik 2018. Czy jest to możliwe? Jeśli tak, to ile minimalnie plusów trzeba zastąpić minusami by ten wynik osiągnąć?



Zad. 4. Na bokach trójkąta prostokątnego *ABC* dorysowano kwadraty (patrz rysunek obok). Uzasadnij, że pola szarych trójkątów są równe.

Zad. 5. Ciąg liczb całkowitych nieujemnych jest taki, że mnożąc cyfry dowolnego wyrazu otrzymujemy wyraz następny. Pokaż, że ciąg ten jest od pewnego miejsca stały dla dowolnego wyrazu początkowego.

Zad. 6. Rozstrzygnij czy liczby są względnie pierwsze, gdzie jest liczbą naturalną.

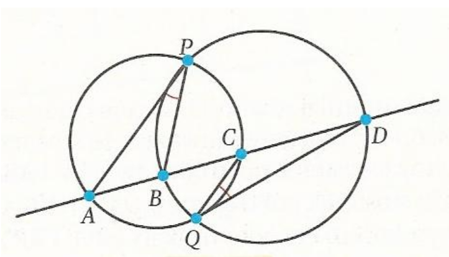
Zad. 7. Wyznacz wszystkie uporządkowane trójki liczb całkowitych dodatnich, które spełniają równanie

.

Zad. 8. Niech *M* będzie środkiem boku *AB* kwadratu *ABCD*, zaś *E* – punktem przecięcia przekątnej *BD* z odcinkiem *CM*. Oblicz stosunek

Zad. 9. W prostokącie *ABCD* punkty *I* i *J* są odpowiednio środkami boków *AD* i *AB*, a odcinki *BI* i *DJ* przecinają się w punkcie *O*. Oblicz stosunek pól czworokątów *AIOJ* i *CBOD*.

Zad. 10. Jak konstrukcyjnie podzielić dane koło z zaznaczonym środkiem na 9 części o równych polach?



Zad. 11. Dane są dwa okręgi przecinające się w punktach *P* i *Q*. Prosta przecina te okręgi w punktach *A, B, C, D*. Udowodnij, że miary kątów *APB* i *CQD* są równe.

Zad. 12. Na stole leżą dwa stosy kamieni – jeden liczący 56 kamieni oraz drugi liczący 44 kamienie. Dwóch graczy gra w następującą grę: Gracze na przemian zabierają z jednego z wybranych przez siebie stosów dowolną niezerową liczbę kamieni. Wygrywa osoba, która zabierze ze stołu ostatni kamień. Który z graczy ma strategię wygrywającą i na czym ona polega?

Zad. 13. W układzie współrzędnych narysowano okrąg o środku w punkcie (-2018, 2019) i promieniu równym 2018. Nazwijmy punktem kratowym każdy punkt płaszczyzny, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. Dwoje graczy gra w następującą grę: Gracze na przemian zaznaczają wewnątrz narysowanego okręgu po jednym punkcie kratowym. Przegrywa osoba, która nie może zaznaczyć żadnego punktu. Który z graczy ma strategię wygrywającą i na czym ona polega?

Zad. 14. Uzasadnij, że jeśli jest liczbą pierwszą, taką że także jest liczbą pierwszą to jest liczbą złożoną.

Zad. 15. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb zachodzi nierówność:

— —

Zad. 16. Wykaż, że układu równań i z niewiadomymi nie spełnia żadna uporządkowana piątka liczb całkowitych.

SZKICE ROZWIĄZAŃ

Zad. 1. Wypowiedź Bogusia wyklucza Adama i Cześka (w przeciwnym wypadku mielibyśmy albo dwie poprawne albo dwie fałszywe wypowiedzi). Podobnie, wypowiedź Cześka wyklucza Bogusia i Egona. Zatem sprawcą może być tylko Darek. Sprawdzenie warunków zadania to potwierdza.

Zad. 2. Oznaczmy wiek Jasia, Bronka oraz Marysi symbolami *j*, *b* oraz *m*, zaś wiem mamy i taty symbolami *M* i *T*. Podane w treści zadania zależności dadzą się zapisać:

Mamy też oraz . Zauważmy, że jeśli , to (gdy liczba *b* leży na osi liczbowej między *j* a *m*) lub (gdy liczba *b* nie leży między liczbami *j* a *m*).

Zauważmy, że:

Gdyby to mielibyśmy . Ponieważ *b* jest liczbą całkowitą, to więc musi być oraz . Jeśli jednak założymy, że , to ze względu na równość mamy również . Niezależnie więc od wybranej sytuacji mamy oraz . Przy czym . Zauważamy, więc, że dla pewnej liczby naturalnej *b* mamy , Sprawdzając kolejne liczby naturalne widzimy, że musi być . Ostatecznie mama i tata mają po 36 lat, a każde z dzieci po 6 lat.

Zad. 3. Zauważmy, że zastąpienie znaku + przed liczbą *a* znakiem - powoduje zmniejszenie wartości sumy o *2a*. Operacja taka nie zmienia więc parzystości sumy. A to oznacza, że nie ma możliwości uzyskania wyniku 2018.

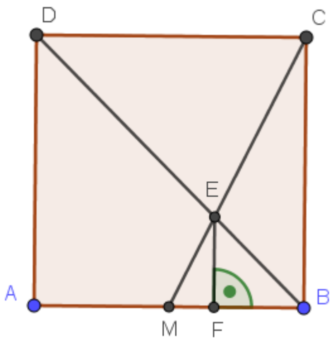
Zad. 4. Wystarczy pokazać, że pole każdego z szarych trójkątów jest takie samo, jak pole trójkąta *ABC*. Dla trójkąta *CID* jest to oczywiste, gdyż jest on przystający do trójkąta *ABC*. Oznaczmy rzut punktów *C* i *E* na prostą *AB* odpowiednio przez i *E'*. Wówczas trójkąty *AC'C* i *EE'A* są przystające, co oznacza, że . W takim razie pola trójkątów *FAE'* i *ABC* są takie same. Z drugiej strony, pola trójkątów *FAE'* i *FAE* są takie same (wspólna podstawa i taka sama wysokość). To daje równość pól trójkątów *FAE* i *ABC*. Analogicznie wykazujemy dla trójkąta *GHB*.

Zad. 5. Załóżmy, że jest pierwszym wyrazem rozważanego ciągu ( ) i . Wtedy , o ile . Oznacza to, że ciąg określony w zadaniu jest malejący, póki jego wyrazy nie staną się jednocyfrowe.

Zad. 6. Zauważmy, że . Zatem, jeśli istnieje liczba *d*, która jest dzielnikiem oraz , to musi być dzielnikiem liczby , zatem może przyjmować jedynie wartości 1 lub 2. Jednak liczba jest nieparzysta, czyli , a zatem liczby i są względnie pierwsze. Za rozwiązanie na przykładach ocena 0 pkt.

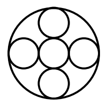
Zad. 7. Dane równanie można zapisać jako lub równoważnie $(x+y+z)(x+y-z) = 9$. Liczby i muszą być dzielnikami 9. Ponieważ x, y i z są całkowite dodatnie, pierwszy z czynników jest dodatni, ale drugi może być ujemny, wtedy jednak pierwszy też musiałby być ujemny. Zatem oba czynniki są dodatnie i w grę wchodzą rozkłady 1 lub 3 , przy czym ten ostatni wykluczamy, ponieważ Dostajemy układ równań:

Rozwiązując go, otrzymujemy oraz a to daje rozwiązanie { Za rozpatrywanie zbędnych przypadków odejmujemy 2 punkty. Jeśli pominięto jakąś trójkę, traktujemy zadanie jako nierozwiązane. Podanie prawidłowej odpowiedzi bez uzasadnienia, ze to są jedyne możliwe trójki oceniamy na 3 pkt.



Zad. 8. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Niech F będzie spodkiem wysokości trójkąta BEM poprowadzonej z wierzchołka E i niech Trójkąt BEF jest podobny do trójkąta ABD (z cechy kkk) – za samo stwierdzenie podobieństwa odejmujemy 3 punkty. Zatem jest to trójkąt prostokątny równoramienny, czyli Z kolei trójkąt MFE jest podobny do trójkąta MBC (z cechy kkk) – za brak uzasadnienia odejmujemy kolejne 3 punkty, chyba że już zostały odjęte poprzednio). Zatem Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MFE obliczamy Zatem . Za pozostawienie niewymierności w mianowniku odejmujemy 1 pkt).

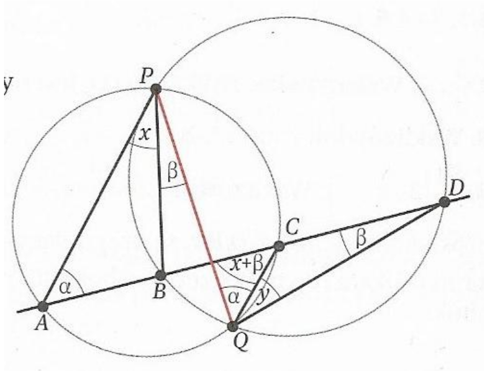
Zad. 9. Poprowadźmy przekątną BD i linię środkową IJ. Te odcinki są równoległe, a długość IJ jest połową długości BD. Otrzymujemy 2 pary trójkątów podobnych w skali 1/2 (z cechy kkk, bo odpowiednie boki w tych trójkątach są parami równoległe): $\Delta BCD \sim \Delta JAI$, $\Delta BDO \sim \Delta JIO$. Czworokąty z zadania powstają ze sklejenia odpowiednich trójkątów najdłuższymi bokami, przez co otrzymujemy czworokąty podobne w skali ½. Stosunek ich pól jest kwadratem skali podobieństwa i wynosi ¼.



Zad. 10. I sposób. Znajdujemy konstrukcyjnie odcinek 3 razy krótszy od promienia danego koła, wykreślamy koncentryczne koło o takim właśnie promieniu. Ma ono pole równe dziewiątej części dużego koła. Pozostały pierścień można łatwo podzielić na 8 przystających części, prowadząc promienie dużego koła co 45°.

II sposób: W dane koło wpisać 5 przystających kół o 3 razy mniejszym promieniu (rys).

III sposób: Skonstruować koncentryczne koła o 3 razy mniejszym promieniu, kolejne koła o promieniu √2, √3, 2, √5, √6, √7 i √8 razy większym ($\sqrt{n}\cdot r$ można skonstruować na podstawie twierdzeń Pitagorasa i Talesa). Powstaje podział na wewnętrzne koło i pierścienie o polach po $^1/_9$ wyjściowego koła.



Zad. 11. Poprowadźmy cięciwę PQ. Oznaczmy $|\angle APB| = x$, $|\angle CQD| = y$. Na mocy twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku stwierdzamy, że $|\angle PAC| = |\angle PQC| = \alpha$ oraz $|\angle BPQ| = |\angle BDQ| = \beta$. Przy wprowadzonych oznaczeniach otrzymujemy $|\angle APQ| = x + \beta$. Na mocy twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku otrzymujemy $|\angle APQ| = |\angle ACQ| = x + \beta$. Zauważmy, że $|\angle ACQ| = x + \beta$ jest kątem zewnętrznym trójkąta CQD. Z twierdzenia o kącie zewnętrznym dostajemy więc równość $x + \beta = y + \beta$. A stąd otrzymujemy tezę, czyli $x = y$, tzn. $|\angle APB| = |\angle CQD|$.

Zad. 12. Strategię wygrywającą ma osoba rozpoczynająca grę. Wystarczy, że w pierwszym ruchu zabierze 12 kamieni ze stosu na którym jest 56 kamieni, doprowadzając tym samym do sytuacji, w której po jej ruchu oba stosy liczą po 44 kamienie. Następnie osoba rozpoczynająca grę kopiuje ruchy przeciwnika, zabierając za każdym razem taką samą liczbę kamieni, ale z drugiego stosu. Postępując w ten sposób za każdym razem po wykonaniu ruchu przez gracza rozpoczynającego na obu stosach pozostaje taka sama liczba kamieni. W końcu gdy gracz nierozpoczynający opróżni całkowicie jeden ze stosów, gracz rozpoczynający zabiera wszystkie kamienie z drugiego stosu, kończąc zwycięsko grę.

Zad. 13. Strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę. Polega ona na tym, że w pierwszym swoim ruchu zaznacza on punkt kratowy będący środkiem okręgu, a następnie na każdy ruch przeciwnika odpowiada zaznaczeniem punktu symetrycznego względem środka okręgu. Z symetrii okręgu wynika, że gracz rozpoczynający grę będzie zawsze w stanie odpowiedzieć na ruch przeciwnika, zatem to on zaznaczy ostatni punkt kratowy, zmuszając przeciwnika do przegranej.

Zad. 14. Rozważmy liczby pierwsze większe od 3 i niepodzielne przez 3, tj. liczby pierwsze o postaci oraz , gdzie jest liczbą naturalną. Przypadek, gdy nie spełnia założeń, gdyż mamy wtedy, że liczba nie jest liczbą pierwszą. W drugim przypadku dla liczba jest złożona, co należało dowieść.

Zad. 15. Przemnażając obustronnie naszą nierówność przez mamy:

Co kończy dowód, gdyż otrzymaliśmy po lewej stronie iloczyn dwóch czynników nieujemnych.

Zad. 16. Przypuśćmy, że dany układ równań ma rozwiązanie w zbiorze liczb całkowitych. Ponieważ liczba jest nieparzysta, z równania wynika, że liczby są nieparzyste. Wtedy ich suma jest liczba nieparzystą, więc nie może być równa 20. Otrzymana sprzeczność z równaniem dowodzi, ze dany układ równań nie ma rozwiązania.