MIĘDZYREGIONALNE MECZE MATEMATYCZNE SZKÓŁ PODSTAWOWYCH DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE

Gdańsk, 5 czerwca 2019

1. Tomek szedł do szkoły. Połowę drogi przebył z prędkością 4 km/h, połowę pozostałej części z prędkością 100 m/min, a resztę drogi z prędkością 10 km/h. Jaka była średnia prędkość Tomka w drodze do szkoły?

2. Ile dzielników liczby 3600 ma dokładnie dwanaście dzielników?

3. Ile jest równa reszta z dzielenia $(1 + 2 + 3 + ... + 48)^{2019}$ przez 50?

4. Dane są dwa okręgi styczne wewnętrznie o środkach O_1, O_2 i promieniach r i R, przy czym $r < R$. Cięciwa większego okręgu styczna do mniejszego i prostopadła do prostej O_1O_2 ma długość 12. Oblicz pole prostokąta, którego kolejnymi wierzchołkami są O_2, O_1, A, gdzie A leży na mniejszym okręgu.

5. Na tablicy napisano kolejne liczby całkowite od -2019 do 2019. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać liczbę $ab + a + b$. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka?

6. Na płaszczyźnie dane są trzy różne proste równoległe k, l i m. Jeśli na prostej k zaznaczono 3 różne punkty, na prostej l zaznaczono 4 różne punkty, na prostej m zaznaczono 2 różne punkty a następnie narysowano wszystkie możliwe trójkąty o wierzchołkach w tych punktach, to ile najmniej, a ile najwięcej trójkątów otrzymano?

7. Wyznacz liczby x takie, że jedna z liczb x, $[x]$, $\{x\}$ jest średnią arytmetyczną pozostałych Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nieprzekraczającą x, a $\{x\} = x–[x]$.

8. Czy liczba $20190 \cdot 20191 \cdot 20192 \cdot 20193 + 1$ jest pierwsza?

9. Kwadratowa plansza o boku 60 jest podzielona na kwadraty jednostkowe zwane polami. Na planszy ułożono pewną liczbę prostokątnych klocków o wymiarach 1×11 tak, aby każdy z nich dokładnie przykrywał 11 pól, a przy tym żadne pole nie jest przykryte przez więcej niż jeden klocek. Udowodnij, że co najmniej 25 pól zostało niepokrytych.

10. Czy istnieje trójkąt równoramienny, który można podzielić na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, aby żadne dwa z tych trzech trójkątów nie były podobne?

MIĘDZYREGIONALNE MECZE MATEMATYCZNE SZKÓŁ PODSTAWOWYCH DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE

Gdańsk, 5 czerwca 2019

Rozwiązania

1. Podzielmy drogę Tomka na cztery równe części. Jego prędkość na kolejnych kawałkach drogi wynosiła (w km/h): $4, 4, 6, 10$. Oznaczmy długość każdej z tych części (wyrażoną w km) przez x – wówczas czas poświęcony na przejście kolejnych fragmentów to odpowiednio $x/4$, $x/4$, $x/6$ i $x/10$. Oznacza to, że średnia prędkość jest równa (w km/h)

$$\frac{4x}{x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\right)} = \frac{120}{23} \approx 5,2.$$

2. Ponieważ $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, to liczba naturalna ma dokładnie 12 dzielników, jeżeli jest jednaj z postaci p^{11}, pq^5, p^2q^3, pqr^2, gdzie p, q, r są różnymi liczbami pierwszymi. Mamy $3600 = 2^4 3^2 5^2$, zatem tylko dwie ostatnie postaci są możliwe dla dzielników liczby 3600. Są to dzielniki $p^2 2^3$ dla $p = 3$ lub $p = 5$ oraz liczby postaci pqr^2 dla $\{p, q, r\} = \{2, 3, 5\}$, których jest trzy. Szukanych dzielników jest 5.

3. Reszta ta równa jest 26. Rozważając równości modulo 50 mamy $1 + 2 + \cdots + 48 = (1 + 48) + (2 + 47) + \cdots + (24 + 25) = 49 \cdot 24 \equiv -24 \equiv 26$. Ponieważ $26^2 = 676 \equiv 26$, to $26^{2019} \equiv 26$, co jest szukaną resztą z dzielenia.

4. Niech wymieniona cięciwa będzie styczna do mniejszego okręgu w punkcie B i przecina większy w punkcie C. W trójkącie prostokątnym BCO_2 mamy $BC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$, $O_2C = R$, $O_2B = |2r - R|$, zatem $R^2 = (2r - R)^2 + 6^2$, stąd $4Rr - 4r^2 = 36$, czyli $r(R - r) = 9$. Ponieważ $O_1O_2 = R - r, O_1A = r$, to pole rozważanego prostokąta wynosi $r(R - r) = 9$.

5. Na tablicy jest liczba -1 i ona wybrana z dowolna inną liczbą powraca na tablicę. Zatem to ona zostanie na końcu.

6. Trójkątów takich, że dwa wierzchołki są na jednej z rozważanych prostych, a trzeci na innej jest $3(4 + 2) + 6(3 + 2) + 1(3 + 4) = 55$. Trójkątów takich, że każdy wierzchołek jest na innej prostej, jest maksymalnie $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, a minimalnie 24 pomniejszone o liczbę prostych przecinających rozważane proste tylko w rozważanych punktach. Takich prostych może być co najwyżej $2 \cdot 3 = 6$ (dwa możliwe punkty przecięcia z prostą m i trzy z prostą k). Liczba 6 może być osiągnięta w następującej sytuacji. Niech rozważane proste będą ustawione w kolejności takiej, jak wymienione w treści zadania. Na prostej m obierzmy punkty M_1 i M_2, a na prostej k punkt K_2. Proste M_1K_2 i M_2K_2 przecinają prostą l odpowiednio w punktach L_2 i L_3, a proste M_1L_3 i M_2L_2 prostą k odpowiednio w punktach K_3 i K_1. Niech L_1 i L_4 będą punktami przecięcia prostej l odpowiednio z prostymi M_1K_1 i M_2K_3. Jest to szukana sytuacja.

   Liczba badanych trójkątów jest liczbą między 73 i 79.

7. Zastanówmy się najpierw, która z liczb jest między pozostałymi (w sensie relacji $\leqslant$). Gdyby liczbą tą było $\{x\}$, to musiałoby być

$$0 = [x] \leqslant \{x\} \leqslant x < 1,$$

   ale dla $x \in (0, 1)$ mamy $x = \{x\}$ co oznacza, że $x = [x] = \{x\} = 0$.

   Z kolei gdy $[x] \leqslant x \leqslant \{x\}$, to zgodnie z warunkami zadania $x = \frac{[x]+\{x\}}{2} = \frac{x}{2}$, co oznacza $x = 0$ i daje to samo rozwiązanie co poprzednio.

   Rozpatrzmy więc przypadek gdy $\{x\} \leqslant [x] \leqslant x$. Niech $[x] = m$. Wtedy $m \leqslant x < m + 1$. Zgodnie z warunkami zadania $[x] = \frac{\{x\}+x}{2}$, czyli $m = \frac{(x-m)+x}{2}$, skąd $x = \frac{3}{2}m$. Po podstawieniu do nierówności otrzymujemy $m \leqslant \frac{3}{2}m < m+1$, skąd $0 \leqslant m < 2$. Ponieważ m jest liczbą całkowitą, więc $m = 0$ lub $m = 1$. Wobec tego $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}$ i odpowiednio $\{x\} = 0$ i $[x] = 0$ lub $\{x\} = \frac{1}{2}$ i $[x] = 1$. Mamy więc $x = 0$ lub $x = \frac{3}{2}$.

8. Należy zauważyć tożsamość $n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$. Wynika z niej, że liczba jest złożona. Jest kwadratem liczby pierwszej 407696671.

9. Stosujemy standardowe numerowanie: 1 w lewym górnym rogu oraz cyklicznie $1, 2, 3, 4, ..., 11$ w rzędach poziomych i pionowych. Liczby 10 i 11 występują po 325 razy, więc można ułożyć co najwyżej 325 klocków pokrywających 3575 pól, a wiec 25 zostaje niepokrytych.

10. Tak. Niech $\alpha = 180°/7$. Wówczas trójkąt równoramienny o kątach $\alpha, 3\alpha, 3\alpha$ dzielimy odpowiednią trójsieczną kąta 3α na trójkąty o kątach $\alpha, \alpha, 5\alpha$ oraz $2\alpha, 2\alpha, 3\alpha$. Jest to jedyny przykład spełniający warunki zadania.