MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY LICEÓW
DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE – WIELKOPOLSKA
Poznań, 13 czerwca 2017

Zad. 1. O punktach $M=(12, 4)$, $N=(14, 8)$, $P=(2, 14)$, $Q=(2, 4)$ wiadomo, że należą kolejno do boków AB, BC, CD i DA kwadratu $ABCD$. Oblicz pole tego kwadratu.

Zad. 2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzy wybrane losowo wierzchołki 60-kąta foremnego utworzą trójkąt ostrokątny?

Zad. 3. W przestrzeni dane są punkty A, B, C, D takie, że $|AB|=|BC|=|CD|=1$, $|\measuredangle ABC|=|\measuredangle BCD| = 120^{\circ}$, a kąt między wektorami $\vec{AB}$ i $\vec{CD}$ wynosi 60°. Ile wynosi długość AD?

Zad. 4. Ile par (x, y) liczb całkowitych nieujemnych spełnia równanie $3\cdot 2^x + 1 = y^2$?

Zad. 5. Liczbę 12 można rozłożyć na iloczyn trzech czynników na 18 sposobów (rozróżniamy rozkłady różniące się kolejnością czynników, np. $1\cdot 1\cdot 12$ i $1\cdot 12\cdot 1$ oraz $2\cdot 2\cdot 3$ i $2\cdot 3\cdot 2$). Na ile sposobów można zapisać $10!$ jako iloczyn trzech czynników?

Zad. 6. W trójkącie ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka C jest równa połowie długości podstawy AB. Jaką największą miarę może mieć kąt C?

Zad. 7. Cyfry kolejnych liczb dwucyfrowych od 19 do 92 zapisano jedną za drugą otrzymując liczbę 192021222324...909192. Wyznacz największą potęgę liczby 3, która dzieli tak otrzymaną liczbę.

Zad. 8. Rozstrzygnij, czy czworościan foremny ma przekrój będący kwadratem.

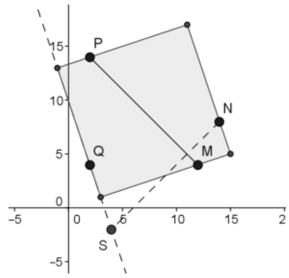
Zad. 9. Wykaż, że suma $\cos 5^\circ + \cos 77^\circ + \cos 149^\circ + \cos 221^\circ + \cos 293^\circ$ równa jest 0.

Zad. 10. Uzasadnij, że każda liczba postaci n^5+n+1 (dla całkowitych $n>1$) jest złożona.

Zad. 11. Niech x, y, z będą liczbami dodatnimi. Pokaż, że jeśli x^2, y^2, z^2 tworzą ciąg arytmetyczny, to liczby $\frac{x+y+z}{x+y}$, $\frac{x+y+z}{x+z}$, $\frac{x+y+z}{y+z}$ również.

Zad. 12. Wykaż, że w każdym równoległoboku suma kwadratów długości przekątnych jest równa sumie kwadratów długości boków.

SZKICE ROZWIĄZAŃ



1. Narysujmy odcinek MP oraz odcinek NS przecinający MP pod kątem prostym i spełniający $|NS| = |MP|$. Wówczas S musi należeć do prostej zawierającej bok AD. Używając do obliczeń wektorów, uzyskujemy $S = (4, -2)$. Oznacza to, że prosta AD (przechodząca przez Q i S) ma równanie $y = -3x + 10$. Odległość N od tej prostej wynosi $4\sqrt{10}$ i równa jest długości boku kwadratu $ABCD$. Pole kwadratu wynosi więc 160.

2. Wszystkich możliwych trójkątów jest $\binom{60}{3}$. Opiszmy okrąg na wielokącie i ustalmy jedną z 30 głównych przekątnych tj. średnic (ozn. AA'). Dla niej istnieje 58 trójkątów prostokątnych na niej opartych, zatem wszystkich trójkątów prostokątnych jest $30\cdot 58$. Z kolei jest $\binom{29}{2}$ trójkątów rozwartokątnych, które zawierają wierzchołek A i leżą wszystkie po tej samej stronie AA'. Wszystkich trójkątów rozwartokątnych jest więc $60\cdot\binom{29}{2}$.

Pozostałe są ostrokątne. Odpowiedź to $1 - {}^3/_{59} - {}^{42}/_{59} = {}^{14}/_{59}$.

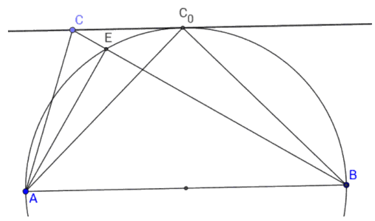
3. Rozważmy układ współrzędnych XYZ taki, że $A=(-1, 0, 0)$, $B=(0, 0, 0)$, $C=({}^1/_2, {}^{\sqrt{3}}/_2, 0)$. Niech $D=(x, y, z)$.

Z warunków zadania otrzymujemy $\cos 120^\circ = \vec{CB} \circ \vec{CD} = -({}^1/_2)(x-{}^1/_2) - {}^{\sqrt{3}}/_2 (y-{}^{\sqrt{3}}/_2)$, $\cos 60^\circ = \vec{AB} \circ \vec{CD} = (x-{}^1/_2)$ oraz $1 = |CD|^2 = (x-{}^1/_2)^2 + (y-{}^{\sqrt{3}}/_2)^2 + z^2$. Stąd mamy $x = 1$, $y = 2{}^{\sqrt{3}}/_3$, $z^2 = {}^2/_3$, a to pozwala obliczyć $|AD| = \sqrt{6}$.

4. Sprawdzamy, że gdy $x=0$, rozwiązaniem jest $(0, 2)$.
Niech $x \geq 1$. Zapisujemy równanie w postaci $3\cdot 2^x = (y+1)(y-1)$. Stąd $y-1 = 2^m$ lub $y+1 = 2^m$ ($m \geq 0$).
W pierwszym przypadku mamy równość $3\cdot 2^{x-m} - 2 = 2^m$.
Dla $x = m$ otrzymujemy $3 - 2 = 2^m$, $m = 0$ i $x = 0$. Sprzeczność.
Dla $x > m$ mamy: $3\cdot 2^{x-m-1} - 1 = 2^{m-1}$. Taka równość jest możliwa tylko dla $x-m-1=0$ i $2^{m-1}=2$, tj. dla $m = 2$, $x = 3$ i $y = 5$.
W drugim przypadku mamy $3\cdot 2^{x-m} + 2 = 2^m$, i postępując analogicznie jak wyżej znajdujemy parę $(4, 7)$.
Pary (x, y) spełniających równanie są więc trzy: $(0, 2)$, $(3, 5)$ i $(4, 7)$.

5. Mamy rozkład na czynniki pierwsze $10! = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$. Zajmijmy się najpierw dwójkami. Na ile sposobów możemy rozstawić osiem dwójek do trzech czynników? Na $\binom{10}{2}$, bo to jakby mieć osiem dwójek i 2 separatory, czyli 10 elementów. Wybór miejsc na separatory daje rozkład dwójek do czynników. Z każdym czynnikiem robimy to samo niezależnie. Jeśli czynnik pierwszy występuje w potędze n, to można go rozłożyć na czynniki na $\binom{n+2}{2}$ sposoby. Zatem możliwych sposobów zapisania 10! jako iloczynu trzech czynników jest $\binom{10}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2} = 2\cdot 3^5\cdot 5^2 = 12\,150$.

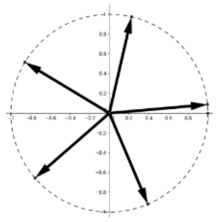
6. Rysujemy równoległą do AB przechodzącą przez C i okrąg o średnicy AB. Niech C_0 będzie punktem wspólnym równoległej i okręgu. Jeśli $C \neq C_0$, to przynajmniej jeden z odcinków (AC lub BC) przecina okrąg. Załóżmy, że jest to BC, a punkt przecięcia oznaczmy E. Kąt AEB jest prosty, stąd $|\measuredangle ACB| + |\measuredangle CAE| = 90°$. W konsekwencji $|\measuredangle ACB| < 90°$. Ponieważ kąt AC_0B jest prosty, największą miarą kąta C jest 90°.



7. Sumę cyfr tej liczby można zapisać jako 1+9+20 (0+1+2+…+9)+ 30 (0+1+2+…+9)+…+80 (0+1+2+…+9)+3·9+3. Ponieważ 0+1+…+9 = 45, to powyższą sumę można zapisać jako (1+2+…+8)·10+7·45+27+3 = 9·(40+35+3)+3.
Stąd wniosek, że 3^1 jest największą potęgą liczby 3, która dzieli liczbę określoną w zadaniu.

8. Czworościan $ABCD$ jest foremny. Niech punkty P, Q, R, S oznaczają odpowiednio środki krawędzi AD, BD, BC i AC. Czworokąt $PQRS$ nie jest zwichrowany, tzn. jego wierzchołki leżą w jednej płaszczyźnie (bo PQ i RS są równoległe, bo oba są równoległe do AB, a proste równoległe wyznaczają płaszczyznę). Analogicznie PS i QR są równoległe. Czworokąt jest więc równoległobokiem, a nawet rombem (jego boki to linie środkowe w przystających trójkątach równobocznych). Sąsiednie boki tego rombu są prostopadłe, bo $PQ \| AB$ i $PS \| CD$ oraz $AB \perp CD$, bo krawędź CD leży w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi AB przechodzącej przez środek AB, a prosta jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie doń prostopadłej. (Należy odjąć 2 punkty, jeśli *explicite* nie pokażą płaskości $PQRS$).

9. Umieszczamy pięć jednostkowych wektorów w układzie współrzędnych w taki sposób, że mają wspólny początek w punkcie O, a kąty między osią OX i poszczególnymi wektorami są równe odpowiednio: 5°, 77°, 149°, 221° i 293°. Suma tych wektorów jest wektorem zerowym (po obrocie całego układu o 72° suma z zadania nie ulega zmianie, a to jest możliwe tylko dla wektora zerowego). To oznacza, że poszukiwana suma jest równa 0, gdyż można ją traktować jak sumę długości rzutów wektorów na oś OX.



10. Mamy $n^5 + n + 1 = n^5 - n^2 + n^2 + n + 1 = n^2(n^3-1) + (n^2 + n + 1) = (n^2+n+1)\,(n^3-n^2+1)$.
Ponadto jeśli $n>1$, to oba czynniki są większe niż 1.
(Za brak ostatniej uwagi odejmujemy 5 pkt.)

11. Oznaczmy kolejne wyrazy badanego ciągu przez A, B, C. Mamy $B-A = (x+y+z)\dfrac{z^2-y^2}{(x+y)(x+z)(y+z)}$

oraz $C-B = (x+y+z)\dfrac{y^2-x^2}{(x+y)(x+z)(y+z)}$, co wobec założenia $z^2-y^2 = y^2-x^2$ daje tezę.

12. W równoległoboku $ABCD$ oznaczmy $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Wówczas $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$ i $\overrightarrow{BD} = \vec{b}-\vec{a}$.

Teraz $|AC|^2+|BD|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 + \left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2 = \ldots = 2\,\vec{a}^{\,2} + 2\,\vec{b}^{\,2} = 2\,|AB|^2 + 2\,|AD|^2$.