MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY LICEÓW
DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE – WIELKOPOLSKA
Wrocław, 8 czerwca 2018

Zad. 1. Między jakimi kolejnymi liczbami całkowitymi znajduje się liczba $\sqrt{55+5\sqrt{55+5\sqrt{5}}}$?

Zad. 2. Ciąg $\{a_n\}$ jest określony wzorem $a_n = [\sqrt{(2n)} + ½]$ dla n= 1, 2, … Rozstrzygnij, ile wyrazów ciągu ma wartość 2018.

Zad. 3. Uszereguj wartości funkcji cos 2, cos 3 i cos 4 od najmniejszej do największej.

Zad. 4. Na boku *CD* rombu *ABCD* wybieramy dowolny punkt *E*. Punkt *F* jest rzutem *E* na przekątną *BD*, zaś *G* – punktem przecięcia odcinków *AE* i *CF*. Uzasadnij, że trójkąty *AFG* i *CEG* mają równe pola.

Zad. 5. Na łące w kształcie pięciokąta foremnego pasie się osiołek. Łąkę otaczają pola kukurydzy, żyta, owsa, prosa i pszenicy, sąsiadując z nią każde wzdłuż innego boku wielokąta. Osiołek chciałby spróbować każdego z tych przysmaków, przepijając każdy z nich wodą z poidełka. W którym miejscu powinno być ustawione to poidełko, aby suma jego odległości od wszystkich boków pięciokąta była najmniejsza?

Zad. 6. Podczas zawodów mistrz świata John Benson uzyskał w biegu na 100 m czas 8 s. Pierwszą trzecią cześć dystansu biegł ruchem jednostajnie przyspieszonym, a potem do mety biegł z jednostajną prędkością. Oblicz jego maksymalną szybkość na bieżni. Czy gdyby biegł tak w terenie zabudowanym, mógłby zapłacić mandat?

Zad. 7. O czterech dodatnich liczbach całkowitych *a*, *b*, *c* i *d* wiadomo, że: $ab + cd = 34$ oraz $ac – bd = 19$. Wyznacz sumę $a + b + c + d$.

Zad. 8. Trójkąt *ABC* nie jest ani równoramienny, ani prostokątny. Określ, ile jest takich punktów *D*, dla których czworokąt *ABCD* ma oś symetrii.

Zad. 9. Znajdź największą liczbę całkowitą *k*, dla której nierówność $a^4 + 8 > k\,a$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej *a*.

Zad. 10. Na każdym polu szachownicy 8×8 napisano liczbę całkowitą. Dozwolone są następujące operacje:
a) wszystkie liczby zawarte w pewnym kwadracie 3×3 zwiększamy o 1,
b) wszystkie liczby zawarte w pewnym kwadracie 4×4 zwiększamy o 1.
Czy zawsze w wyniku wykonywania takich operacji (dowolną liczbę razy) można otrzymać szachownicę wypełnioną wielokrotnościami trójki?

Zad. 11. Czy sześciokąt równoboczny opisany na okręgu musi być foremny?

Zad. 12. Mamy dwa stosy żetonów. Ruch polega na zabraniu dwóch żetonów z jednego stosu i jednego żetonu z drugiego stosu albo na zabraniu dwóch żetonów z jednego stosu i dołożeniu jednego żetonu do drugiego stosu. Czy za pomocą takich ruchów można zabrać wszystkie żetony, jeżeli w sumie na obu stosach jest więcej niż 10?

Zad. 13. W trójkącie *ABC* środki wszystkich wysokości leżą na jednej prostej. Udowodnij, że ten trójkąt jest prostokątny.

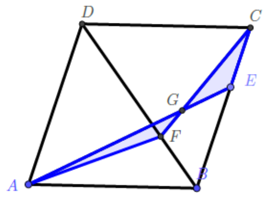
Zad. 14. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x^3 = y^3 + 218$.

UNIWERSYTET GDAŃSKI BEZRUTYNY Uniwersytet Wrocławski fundacja matematyków wrocławskich UAM Poznańska Fundacja Matematyczna

SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Szacujemy z gory $\sqrt{55+5\sqrt{55+5\sqrt{5}}} < \sqrt{55+5\sqrt{55+5\sqrt{9}}} = \sqrt{55+5\sqrt{70}} < \sqrt{55+5\sqrt{81}} = \sqrt{100} = 10$. Szacujemy z dołu: $\sqrt{55+5\sqrt{55+5\sqrt{5}}} > \sqrt{55+5\sqrt{55+5\sqrt{4}}} = \sqrt{55+5\sqrt{65}} > \sqrt{55+5\sqrt{64}} = \sqrt{95} > \sqrt{81} = 9$. Za rozwiązanie kalkulatorowe przyznajemy 0 pkt.

2. Należy wykazać, że $a_m = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{2}(n-1)\,n < m \le \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$, więc każda dodatnia liczba całkowita n występuje w ciągu n razy. Odpowiedź 2018.



3. Ponieważ $\frac{1}{2}\pi < 2 < 3 < \pi$ i wiadomo, że funkcja kosinus maleje w przedziale $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$, więc $\cos 2 > \cos 3$. Ponadto $\cos 4 = \cos(2\pi-4)$, a $2 < 2\pi-4 < 3$, zatem $\cos 2 > \cos 4 > \cos 3$.

4. Czworokąt *AFEC* jest trapezem, a wiec trójkąty *AFC* i *AEC* maja równe pola, a zatem także trójkąty *AFG* i *CEG*, bo odjęliśmy *AGC*.

5. Ustawmy poidełko w pewnym punkcie *P* łąki, który łączymy odcinkami z wierzchołkami pięciokąta *A*, *B*, *C*, *D* i *E*. Niech odległości *P* od poszczególnych boków wynoszą h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, bok pięciokąta wynosi *a*, a pole łąki *S*. Jest ono sumą pól trójkątów *APB*, *BPC*, *CPD*, *DPE* i *EPA* i wynosi $(\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 + \frac{1}{2}ah_4 + \frac{1}{2}ah_5 = \frac{1}{2}a(h_1+\ldots h_5)$. Jest to wielkość stała, zatem każdy punkt wewnętrzny pięciokąta ma żądaną własność. Zadanie może być też w wersji 3D np. dla czworościanu lub dwunastościanu foremnego (albo rombowego) – bez znaczenia. Rozwiązanie jest analogiczne.

6. Niech *v* to maksymalna prędkość biegu, a *t* – czas, w jakim Benson przebiegł trzecią część dystansu. Wykres prędkości w zależności od czasu ogranicza trójkąt oraz prostokąt. Droga, to pole pod wykresem. Stąd otrzymujemy równania: $vt/2 = 100/3$ oraz $v(8-t) = 2/3 \cdot 100$. Podstawiając I do II, otrzymujemy $8v={}^4/_3 \cdot 100$, co daje $v={}^{50}/_3 \approx 16{,}7$ m/s≈60 km/h.

7. Można pokazać, że $(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) = 1517$, a to jest iloczyn dwóch liczb pierwszych 37 i 41, które mają jednoznaczny rozkład na sumy dwóch kwadratów liczb naturalnych: $37 = 1^2 = 6^2$, $41 = 4^2 + 5^2$. Stąd odpowiedź: $a + b + c + d = 16$.

8. Osią symetrii może być albo prosta zawierająca bok trójkąta albo symetralna boku trójkąta. Dla każdego przypadku można wskazać jeden punkt *D*. Stąd odpowiedź 6.

9. Należy pokazać, że $k \le 8$, wstawiając za *a* liczbę 1. Należy wykazać, że $a^4 + 8 > 8a$ dla każdej liczby rzeczywistej *a* (na przykład korzystając z nierówności między średnimi: arytmetyczną i geometryczną). Odpowiedź 8.

10. Kolorujemy I i V wiersz szachownicy na czarno, pozostałe są białe. Po wykonaniu dowolnej operacji reszta z dzielenia przez 3 sumy liczb z białych pól nie zmienia się (w przypadku a. suma wzrasta o 6 lub 9, a w przypadku b. – o 12). Wystarczy zatem na początku wpisać w białe pola liczby, których suma nie dzieli się przez 3, i nie będzie możliwości zajścia warunku zadania.

11. Nie musi. Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny *ABS* o kącie 60° przy wierzchołku *S*. Niech punkt *C* będzie symetryczny do *A* względem *SB*, a *D* symetryczny do *B* względem *SC*, *E* symetryczny do *C* względem *SD*, a *F* symetryczny do *D* względem *SE*. Sześciokąt *ABCDEF* spełnia warunki zadania.

12. Tak. Zauważmy, że jeżeli na stosach będą po 3 żetony, to możemy je zabrać po dwóch ruchach. Niech (n, k) oznacza taki stan, że na pierwszym stosie znajduje się *n* żetonów, a na drugim *k*. Przez $[a, b]$ oznaczmy ruch polegający na zabraniu *a* żetonów z pierwszego i b żetonów z drugiego stosu (liczba -1 oznacza dołożenie żetonu). Jeżeli $n>k$, to ruchami [2, -1] możemy otrzymać stan (p, q) taki, że $p=q$ lub $|p-q| = 1$ oraz $p, q \ge 5$. Jeżeli *p* i *q* nie są równe, ruchem [1, 2] lub [2, 1] otrzymujemy taką samą, równą co najmniej 3, liczbę żetonów na stosach. Analogicznie postępujemy, jeśli $n<k$. Jeżeli mamy stan (r, r) dla $r > 3$, to dwoma ruchami [2, -1] i [-1, 2] otrzymujemy stan $(r-1, r-1)$, zatem po wielokrotnym zastosowaniu tej procedury możemy doprowadzić do stanu (3, 3).

13. Niech wysokości, to *AD*, *BE* i *CF* oraz *AD* rozdziela środki odcinków *BE* i *CF* (przynajmniej jedna wysokość ma tę własność). Wtedy środek *AD* leży na linii środkowej trójkąta *ABC*. Jeśli kąt *A* jest ostry, to *E* i *F* leżą na bokach trójkąta, zatem środki *BE* i *CF* leżą poniżej linii środkowej po różnych stronach *AD*, a więc nie na jednej prostej. Analogicznie gdy kąt *A* jest rozwarty, to środki dwóch wysokości leżą powyżej linii środkowej. Trzeba jeszcze pokazać, że dla kąta prostego jest dobrze.

14. Można skorzystać ze wzoru $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ i z faktu, że $218 = 2 \cdot 109$, a 109 jest pierwsza. Należy rozpatrzyć sytuacje gdy $x - y = 1$, $x - y = 2$ oraz $x - y = 109$ i rozwiązać odpowiednie równania kwadratowe. Odp. $x = 7$, $y = 5$.