

MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY LICEÓW
DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE – WIELKOPOLSKA
Gniezno, 7 czerwca 2019

ZADANIA

1. W zależności od parametru $t > 0$ wyznacz liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} a(1 - b^2) = t \\ b(1 - c^2) = t \\ c(1 - d^2) = t \\ d(1 - a^2) = t \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych dodatnich a, b, c, d .

2. Każda z przekątnych: AD, BE, CF dzieli sześciokąt wypukły $ABCDEF$ na dwa czworokąty o równych polach. Udowodnij, że te przekątne przecinają się w jednym punkcie.

3. Wykaż, że liczba 12345 ma wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym występują same piątki.

4. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły. Niech L_1 i L_2 będą obwodami trójkątów odpowiednio ACE i BDF , a L – obwodem tego sześciokąta. Udowodnij, że $L < L_1 + L_2 < 2L$.

5. Punkt A leży na paraboli o równaniu $y = x^2$, a punkt B na okręgu o równaniu $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 1$, przy czym długość odcinka AB jest najmniejsza z możliwych. Wyznacz współrzędne punktu A .

6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których prawdziwe jest następujące zdanie: *Każdy równokątny n -kąt wpisany w okrąg jest foremny.*

7. Ile spośród liczb $n \in \{1, 2, \dots, 10000\}$ ma tę własność, że n^n jest ósmą potęgą liczby naturalnej?

8. Adam wyrusza rowerem z Gdańska do odległego o 20 km Tczewa i jedzie ze stałą prędkością 10 km/h. Równocześnie z Tczewa wyrusza w kierunku Adama sroka. Gdy dolatuje do niego, natychmiast zawraca. W Tczewie sroka znowu robi natychmiastowy nawrót. Bawi się w ten sposób, dopóki Adam nie dojedzie do Tczewa. Sroka leci z prędkością 20 km/h względem powietrza, jednak wieje stały wiatr z Gdańska w kierunku Tczewa o prędkości 10 km/h. Oblicz dystans, który przebyła sroka podczas podróży Adama z Gdańska do Tczewa.

9. Odcinki AC i BC są przeciwprostokątnymi trójkątów prostokątnych równoramiennych AKC i BLC , zbudowanych na zewnątrz trójkąta ABC . Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym trójkąt ABP również jest prostokątny równoramienny, z przeciwprostokątną AB . Udowodnij, że czworokąt $CKPL$ jest równoległobokiem.

10. Na tablicy napisano liczby całkowite od -2019 do 2019 . W pojedynczym ruchu możemy zetrzeć dwie liczby zapisane aktualnie na tablicy, powiedzmy a i b , a następnie zapisać liczbę $ab + a + b$. Takie ruchy wykonujemy, aż na tablicy zostanie jedna liczba. Wyznacz tę liczbę.

11. Czy dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich m i n zachodzi nierówność $4m^2n^2 < 4m^5 + n^5$?

12. Dla pewnego naturalnego $n > 0$ liczby 2^n i 5^n w swoim zapisie dziesiętnym mają taką samą pierwszą cyfrę, równą c . Wyznacz wszystkie możliwe wartości c .