MIĘDZYREGIONALNE MECZE MATEMATYCZNE SZKÓŁ PODSTAWOWYCH DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE

Gdańsk, 12 czerwca 2018

1. 17 kg jabłek rozłożono do pięciu toreb tak, że waga jabłek w każdej torbie wyrażała się całkowitą dodatnią liczbą kilogramów, przy czym różną w różnych torbach. Pokaż, że w jednej z toreb było dokładnie 3 kg jabłek.

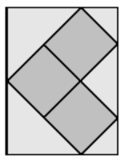
2. Jaś i Małgosia siedzą naprzeciwko siebie przy stole, na którym leży standardowa kostka do gry. Kostka ma tę własność, że suma oczek na przeciwległych ścianach jest taka sama, niezależnie od tego, które dwie przeciwległe ściany wybierzemy. Jaś widzi górną ściankę kostki i dwie boczne, a suma oczek na tych trzech ściankach wynosi 9. Małgosia również widzi górną ściankę kostki i dwie boczne - ale inne niż te, które widzi Jaś - i suma oczek na tych trzech ściankach wynosi 11. Ile oczek znajduje się na ściance dotykającej do stołu?

3. W szufladzie Jana Bałagana leżą wrzucone w nieładzie skarpety: 10 w kolorze kanarkowym, 8 w kolorze morskim i 4 wściekle różowe. Jan pakuje się na wycieczkę i wyjmuje po ciemku pojedyncze skarpety z szuflady w sposób losowy. Ile sztuk powinien wyjąć, aby mieć pewność, że będzie miał parę skarpet w tym samym kolorze i jeszcze jedną parę na zmianę? (ta druga para oczywiście składa się z dwóch skarpet, które są w tym samym kolorze, ale obie pary mogą mieć inny kolor).

4. W magicznym sklepie ze słodyczami pojawiła się specjalna oferta na trzy rodzaje słodkości: *smocze pazurki*, *uszy goblina* i *ząbki ogra*. Wiemy, że *ząbek ogra* jest ponad trzy razy droższy od *smoczego pazurka*. Z kolei sześć *smoczych pazurków* kosztuje więcej niż jedno *ucho goblina*. Zaś *ząb ogra* oraz dwa *smocze pazurki* kosztują mniej niż *ucho goblina*. Ile kosztuje każda ze słodkości, jeśli wiadomo, że cena każdej z nich jest całkowitą liczbą dodatnią oraz że za *smoczy pazurek*, *ucho goblina* i *ząbek ogra* trzeba zapłacić 40 dukatów?

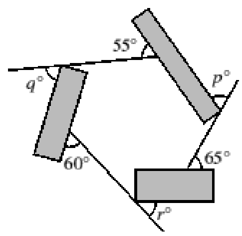
5. Ile liczb trzycyfrowych wzrasta o 99, jeśli czytamy je wspak?

6. Trzy kwadraty o boku długości 2 ustawiono w kształt litery L, a ten umieszczono wewnątrz prostokąta tak, że wszystkie wierzchołki figury L leżały na jego obwodzie, a jeden z nich był środkiem boku prostokąta (jak na rysunku). Oblicz pole prostokąta.

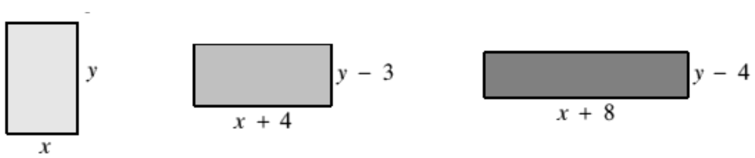


7. Gdyby długość boku kwadratu $ABCD$ zwiększyć o 5 cm, to jego pole wzrosłoby o 295 cm^2. Ile wynosi pole kwadratu $ABCD$?

8. Na rysunku przedstawiono trzy prostokąty i trzy półproste. Ile wynosi suma p, q i r?



9. Trzy prostokąty z rysunku mają jednakowe pola. Ile wynoszą ich obwody?



10. W trójkącie ABC poprowadzono wybrano punkt D będący środkiem boku BC. Który z punktów B i C leży bliżej prostej AD?

MECZE MATEMATYCZNE – rok szkolny 2017/2018 – poziom: szkoła podstawowa

NADFINAŁ – SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Jedyne możliwe wagi toreb (w kg) to 1,2,3,4,7 lub 1,2,3,5,6.

2. Należy skorzystać z faktu, że w kostce do gry suma oczek na przeciwległych ściankach jest równa 7. Oznaczając liczbę oczek na górnej ściance przez a oraz na bocznych ściankach, które widzi Jaś przez x i y, widzimy, że $a+x+y=9$, zaś $a+7-x+7-y=11$. Co daje $a=3$. W takim razie, na przeciwległej ściance jest 4.

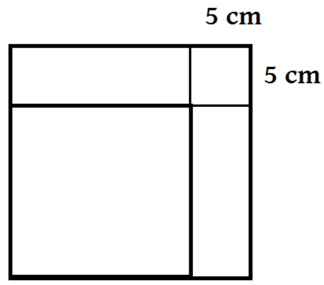
3. Nie wystarczy 5 skarpet, bo mogłyby być wśród nich 3 jednakowe i 2 każda w innym kolorze. Natomiast 6 skarpet wystarczy, bo jeśli wystąpi powyższa sytuacja przy 5 skarpetach, to szósta musi dać drugą parę, niezależnie od tego w jakim będzie kolorze.

4. Oznaczmy s - cena smoczego pazurka, u - cena ucha goblina i z - cena zęba ogra. Z treści zadania wynika, że $s+u+z=40$ oraz $z>3s$, $u>z+2s$ i $6s>u$. Uwzględniając w równaniu pierwsze dwie nierówności otrzymujemy warunek $9s<40$, co oznacza, że $s\leqslant 4$. Z drugiej strony, uwzględniając w równaniu ostatnie dwie nierówności otrzymujemy warunek $11s>40$, co oznacza, że $s\geqslant 4$. W takim razie $s=4$ oraz $u+z=36$, $z>12$, $u>z+8$ i $24>u$. W szczególności $z+8+z<36$, co daje $z<14$. Stąd $z=13$ zaś $u=23$.

5. Niech szukana liczba ma zapis dziesiętny $\overline{abc}$ tj. $100a+10b+c$. Zachodzi $\overline{cba}=\overline{abc}+99$, czyli $100c+10b+a=100a+10b+c+99$, co po uproszczeniu daje $c=a+1$. To daje po 10 liczb postaci: $\overline{1b2}$, $\overline{2b3}$, $\overline{3b4}$, $\ldots$, $\overline{8b9}$, czyli w sumie jest $8\cdot 10=80$ takich liczb.

6. Niech S oznacza pole pojedynczego kwadratu. Pola trójkątów AJI, AJB, BKC, CKD i GLF są równe $S/2$, a pola trójkątów DEF i GHI są równe $S/4$. Pole prostokąta na zewnątrz L wynosi więc $5\cdot S/2+2\cdot S/4=3S$, a pole całego prostokąta to $6S=24$.

7. Pole powiększonego kwadratu składa się z pola kwadratu $ABCD$ pól dwóch przystających prostokątów oraz pola kwadratu o boku długości 5 cm. Z treści zadania wnioskujemy, że pole każdego z prostokątów wynosi 135 cm^2, co oznacza, że bok kwadratu $ABCD$ ma długość 27 cm. W takim razie pole kwadratu $ABCD$ wynosi 729 cm^2.



8. Na rysunku można zaznaczyć pewien nieforemny sześciokąt wypukły. Jego trzy kąty zewnętrzne mają miary 55°, 60° i 65°, czyli w sumie 180°. Ze względu na równoległość boków prostokąta, pozostałe kąty zewnętrzne mają miary p, q i r. Suma katów zewnętrznych dowolnego wielokąta wynosi 360°, zatem $p+q+r=180$.

9. Z równości pól mamy: $xy=(x+4)(y-3)=(x+8)(y-4)$. Po przemnożeniu nawiasów mamy: $xy=xy-3x+4y-12=xy-4x+8y-32$. Po odjęciu xy otrzymujemy $-3x+4y-12=0$ oraz $4x-8y-32=0$ lub równoważnie $3x-4y=-12$ oraz $4x-8y=-32$. Podwajając pierwszą równość i odejmując drugą, mamy $6x-4x=8$, czyli $x=4$ i dalej $y=6$. Szukane obwody to $20, 22, 28$.

10. Oznaczmy rzut punktu B na prostą AD przez B', a rzut punktu C przez C'. Trójkąty prostokątne DBB' i DCC' są przystające (cecha kbk), zatem $|BB'|=|CC'|$.