MIĘDZYREGIONALNY MECZ MATEMATYCZNY SZKÓŁ PODSTAWOWYCH
DOLNY ŚLĄSK – POMORZE GDAŃSKIE
Wrocław, 11 czerwca 2019

1. Dwaj sąsiedzi kosili swoje trawniki, każdy taką samą kosiarką ale z własną stałą prędkością. Obaj na skoszenie trawnika poświęcili tyle samo czasu. Gdyby zamienili się trawnikami, to jeden z nich kosiłby trawnik sąsiada 32 minuty, a drugi – 50 minut. Ile minut kosili własne trawniki?

2. Najdłuższy odcinek łączący środek krawędzi sześcianu z jednym z jego wierzchołków ma długość 12 cm. Ile wynosi objętość tego sześcianu?

3. Wewnątrz kwadratu o boku 10 wybrano 101 punktów. Udowodnij, że pewne dwa z tych punktów są odległe o mniej niż $^3/_2$.

4. Pokaż, że jeżeli czworokąt ma dwie osie symetrii, to jest rombem lub prostokątem.

5. Rozwiąż równanie $x^4 + 843 = x^2 \cdot y^2 + 2019$ w parach liczb naturalnych.

6. Rozwiąż algebraf $T\,R\,Z\,Y\,Z\,E\,R\,O\ :\ Z\,E\,R\,O\ =\ Z\,E\,R\,O$. Każda litera oznacza pewną cyfrę, przy czym różnym literom odpowiadają różne cyfry i na odwrót.

7. Trójkąt *ABC* jest prostokątny i ma przyprostokątne *AC* i *BC* o długościach odpowiednio 5 cm oraz 12 cm. Oblicz odległość środków okręgów wpisanego w ten trójkąt i opisanego na tym trójkącie.

8. Na tablicy napisano 100 jedynek. W pojedynczym ruchu możemy wybrać dwie liczby aktualnie napisane na tablicy, powiedzmy a i b, zmazać je, a zamiast nich napisać iloraz iloczynu i sumy tych liczb. Wykonujemy dozwolone ruchy tak długo, aż na tablicy pozostanie jedna liczba. Jaka?

9. Niech $k = 3 + 33 + 333 + ... + 33...33$ (w ostatnim składniku jest 2019 trójek). Ile wynosi suma cyfr liczby k?

10. Liczbę całkowitą dodatnią nazywamy dwupierwszą, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze występują dwie różne liczby pierwsze (przy czym każda z nich może występować wielokrotnie). Znajdź liczby dwupierwsze, których suma dzielników właściwych wynosi 16.

SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Sąsiedzi, kosząc własne działki, pokonali w tym samym czasie t odpowiednio drogi s_1 i s_2 z prędkościami $v_1 = \frac{s_1}{t}$ i $v_2 = \frac{s_2}{t}$. Po zamianie działek poruszali się z tymi samymi prędkościami i pokonali odpowiednio drogi $s_1 = \frac{s_2}{t} \cdot 32$ i $s_2 = \frac{s_1}{t} \cdot 50$. Z tego układu równań otrzymujemy $t^2 = 32 \cdot 50$, skąd $t = 40$ min.

2. Jeśli długość krawędzi sześcianu oznaczymy przez a, to twierdzenie Pitagorasa zapisane dla trójkąta prostokątnego, w którym jedna z przyprostokątnych jest połową krawędzi sześcianu, druga jest przekątną ściany sześcianu, a przeciwprostokątna jest opisanym w zadaniu odcinkiem długości 12 daje $9/4\ a^2 = 12^2$, co oznacza, że $a = 4$, zatem objętość sześcianu wynosi 64.

3. Kwadrat dzielimy na 100 mniejszych o boku 1. Z zasady szufladkowej istnieje kwadracik, w którym znajdują się co najmniej dwa punkty. Najbardziej odległe punkty kwadratu jednostkowego to przeciwległe wierzchołki w odległości $\sqrt{2} < 1{,}5$.

4. A. Jeśli oś symetrii czworokąta przechodzi przez wierzchołek, to zawiera jego przekątną (w przeciwnym razie przeciwległy wierzchołek należałby do figury wraz ze swoim obrazem różnym od niego samego i mielibyśmy co najmniej pięciokąt). Oś ta (będąca przekątną) musi być prostopadła do drugiej przekątnej i połowić ją (w przeciwnym razie wierzchołki z drugiej przekątnej należałby do figury wraz ze swoimi obrazami różnymi od nich samych i mielibyśmy co najmniej sześciokąt). Zatem czworokąt ten jest deltoidem.
B. Jeżeli oś symetrii czworokąta nie przechodzi przez żaden wierzchołek, to musi być symetralną jednego z boków (w przeciwnym razie byłby to co najmniej sześciokąt), a jednocześnie musi być symetralną boku przeciwległego (w przeciwnym razie byłby to co najmniej sześciokąt). Zatem ten czworokąt ma parę boków równoległych, tzn. jest trapezem) i to równoramiennym (bo ma oś symetrii przechodzącą przez podstawy).
Rozważamy teraz jednocześnie obie osie symetrii. Jeśli jedna jest symetralną boku, a druga zawiera przekątna, to czworokąt jest trapezem równoramiennym i deltoidem, wiec jest kwadratem (czyli i rombem, i prostokątem). Jeśli obie osie zawierają przekątne, to czworokąt jest rombem, a jeżeli obie są symetralnymi boków, to jest prostokątem.

5. Przekształcamy równanie do postaci $x^4 – x^2 \cdot y^2 = 1176$, a po rozłożeniu obu stron na czynniki mamy $x^2(x–y)\ (x+y) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$. Dzielniki prawej strony, które są kwadratami, to 1, 4, 49 i 196, zatem x może być równe 1, 2, 7 lub 14. Podstawiając kolejno do równania, otrzymujemy x=7 (w pozostałych przypadkach równanie jest sprzeczne lub y nie jest naturalne). Jedyna para liczb naturalnych spełniających równanie to (7, 5).

6. Równoważnie mamy $ZERO \cdot ZERO = \mathrm{TRZY}ZERO$. Liczba O ma tę własność, że jej kwadrat też ma w rzędzie jedności O. Stąd $O \in \{0, 1, 5, 6\}$. Liczby $10R+O$ oraz $(10R+O)^2$ dają te same reszty z dzielenia przez 100 (bo mają jednakowe dwucyfrowe końcówki), więc ich różnica $(10R+O)^2 - 10R - O = 100R^2+20RO-10R+O^2–O$ jest podzielna przez 100.
A. Gdy $O \in \{0, 1\}$, to różnice $100R^2–10R$ lub $100R^2+10R$ kończą się dwoma zerami, co daje w obu przypadkach $R = 0$. Z jednoznaczności przyporządkowania wyklucza to przypadek $O = 0$.
B. Gdy $O = 6$, to różnica $100R^2+110R+30$ kończy się dwoma zerami, co daje $R = 7$.
C. Gdy $O = 5$, to różnica $100R^2+90R+20$ kończy się dwoma zerami, skąd $9R$ kończy się na 8 i $R = 2$.
Mamy zatem możliwe końcówki $RO \in \{01, 25, 76\}$.
Zauważmy, że liczba $(100E+10R+O)^2 - (100E+10R+O)$ jest podzielna przez 1000. Gdy $RO = 01$, to $E = 0$, a to przeczy jednoznaczności przyporządkowania. Gdy $RO = 25$, to $E = 6$, a gdy $RO = 76$, to $E = 3$.

Mamy zatem możliwości ERO $\in \{625, 376\}$.
Teraz patrząc na podzielność $ZERO^2-ZERO$ przez10000, widzimy, że gdy $ERO = 625$, to $Z = 0$, ale zapis dziesiętny liczby nie może zaczynać sie od zera; a gdy $ERO = 376$, to $Z = 9$. Podnosząc do kwadratu liczbę 9376, otrzymujemy TRZYZERO = 87909376, co oznacza, że T=8, Y=0 i jest to jedyne rozwiązanie.

7. Środek okręgu opisanego na trójkącie oznaczmy O, a wpisanego w trójkąt W. Punkt O leży w połowie przeciwprostokątnej (wymagamy uzasadniania, inaczej -2 pkt), która ma długość 13. Promień okręgu wpisanego możemy obliczyć, porównując pola trójkąta ABC: $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12 = \frac{1}{2}r(5+12+13)$ – za brak uzasadnienia, odjąć 2 pkt. Czyli r=2. Niech K oznacza punkt styczności okręgu wpisanego do przeciwprostokątnej AB, a L – do krótszej przyprostokątnej AC. Wówczas $|AK| = |AL| = |AC|-r = 3$. Mamy więc $|OK| = |AO| - |AK| = 6{,}5 - 3 = 3{,}5$. Mamy $|WO|^2 = |WK|^2 + |OK|^2 = 4+{}^{49}/_4 = {}^{65}/_4$, stąd $|WO| = \sqrt{65}/2$.

8. W pojedynczym ruchu nie zmienia się suma odwrotności wszystkich liczb z tablicy, bo $\frac{1}{ab:(a+b)} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{b}+\frac{1}{a}$. Na początku suma odwrotności wynosi 100. Kiedy zostanie jedna liczba jej odwrotnością musi być 100, czyli ta liczba to 0,01.

9. Zauważmy, że $k = 1/3\ (10 - 1 + 100 - 1 + 1000 - 1 + \ldots + 10^{2019} - 1) = 1/3\ (111\ldots1110 - 2019)$ odjemna ma 2019 jedynek = 1/3 (111..11109091) tu jest 2015 jedynek = 370370…370369697 tu 370 jest powtórzone 671 razy. Zatem suma cyfr liczby k wynosi $671 \cdot 10 + 3 + 6 + 9 + 6 + 9 + 7 = 6740$.

10. Liczba dwupierwsza jest postaci $n = p^i q^j$ dla pewnych liczb pierwszych $p \neq q$ oraz $i, j \geq 1$. Jeżeli $i, j \geq 2$, to suma dzielników właściwych n jest równa co najmniej $1+2+3+2^2+3^2 > 16$, stąd $n = pq^j$.
A. Jeśli $j = 1$, to suma dzielników właściwych n jest równa $1+p+q = 16$, stąd $p+q = 15$, więc jeden składnik wynosi 2 (suma liczb nieparzystych byłaby parzysta) i $n = 2\cdot 13 = 26$.
B. Jeśli $j \geq 2$, to suma dzielników właściwych n jest równa co najmniej $1+p+q+pq+q^2$, co dla $q \geq 3$ wynosi co najmniej $1+2+3+2\cdot 3+3^2 > 16$. Zatem $q = 2$ i $n = 2^j p$ oraz $16 = 1+2+ \cdot +2^j+p+2p+ \cdot +2^{j-1}p =$ [argumentacja artymetyczna, użycie wzoru na ciąg geometryczny powinno być uzasadnione lub proponuję odjąć 2 punkty za zastosowanie gotowego wzoru] $= 2^{j+1}-1+p(2^j-1) = 2\cdot(2^j-1)+ p(2^j-1) +1 = (2^j-1)(2+p) +1 =$. Stąd $15 = (2^j-1)(2+p) = (4-1)\cdot 5$, czyli $p = 3$, $j = 2$ i $n = 2^2 \cdot 3 = 12$. Jedynymi rozwiązaniami są 26 i 12.

Spośród liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Antek wybrał niektóre i policzył ich iloczyn A oraz iloczyn pozostałych liczb B. Okazało sie, że iloraz A i B jest liczbą całkowitą. Jaka jest jego najmniejsza możliwa wartość?
Rozw. Iloczyn liczb naturalnych od 1 do 10 jest równy $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Aby iloraz był całkowity, wykładnik każdej liczby pierwszej umieszczonej w liczniku powinien być nie mniejszy niż w mianowniku, a uzyskany wynik będzie tym mniejszy, im mniejsza będzie różnica miedzy tymi wykładnikami (chcemy uczynić licznik i mianownik bliskimi sobie nawzajem, czyli iloraz bliskim 1). Tylko jeden wykładnik jest nieparzysty, pozostałe można rozdzielić po równo. Jako najmniejszą wartość ilorazu uzyskamy wówczas $7 = \frac{7 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}$.

W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \| CD$, przekątne przecinają się w punkcie O i są nachylone do podstaw pod kątem 60°. Wykaż, że środki odcinków OA, BC i OD są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
Trapez spełniający warunki zadania jest równoramienny (brak uzasadnienia – 2 pkt). Niech R, S, T będą środkami odcinków odpowiednio OA, BC i OD i ramię trapezu ma długość c. RT łączy środki boków trójkąta AOD, więc $|RT| = {}^c/_2$. Trójkąt BCT jest prostokątny (bo OCD jest równoboczny), więc punkt S (jako środek przeciwprostokątnej) jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Stąd $|TS| = |CS| = |BS| = {}^c/_2$. Podobnie uzasadniamy, że $|SR| = {}^c/_2$. Zatem trójkąt RST jest równoboczny.