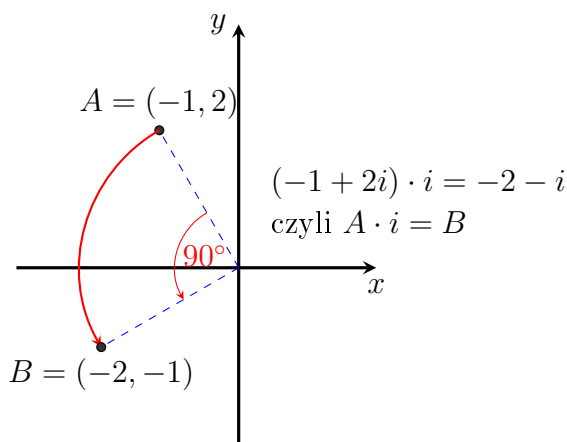


1. Symbol i nazywamy jednostką urojoną; spełnia on warunek $i \cdot i = -1$. Dowlone wyrażenie postaci

$$w = a + i \cdot b, \quad \text{gdzie } a, b \in \mathbf{R}$$

nazywamy liczbą zespoloną. Każdej liczbie zespolonej w odpowiada punkt (a, b) w prostokątnym układzie współrzędnych. W szczególności jednostkę urojoną można utożsamiać z punktem $(0, 1)$.

Obserwacja. Mnożenie liczby zespolonej (punktu na płaszczyźnie) z przez jednostkę i geometrycznie można interpretować jako obrót wokół punktu $(0, 0)$ o kąt $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ w kierunku dodatnim (przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).



Ćwiczenie. Mnożenie przez jaką liczbę zespoloną odpowiada obrotowi o kąt $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ (wokół $(0, 0)$ w kierunku dodatnim)?

Odpowiedź: $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}$; łatwo bowiem sprawdzić, że $z \cdot z = i$, czyli dwa identyczne obroty o kąt 45° składają się na jeden obrót o kąt 90° (analogicznie jak dwa obroty o kąt 90° każdy, daje w efekcie obrót o kąt 180° , czyli $i^2 = -1$).

2. Zachodzi ogólna prawidłowość: mnożenie przez liczbę zespoloną postaci

$$w = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$$

odpowiada obrotowi o kąt α .

Twierdzenie (wzór de Moivre'a). Dla dowolnej liczby rzeczywistej α oraz dowolnej liczby całkowitej m zachodzi równość:

$$(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^m = \cos(m\alpha) + i \cdot \sin(m\alpha). \quad (\text{WdM})$$

Geometrycznie wzór ten oznacza tyle, że złożenie m obrotów o ustalony kąt α jest obrotem o kąt $m\alpha$. Jeśli $m < 0$, to obrót wykonujemy w kierunku ujemnym (czyli zgodnie ze wskazówkami typowego zegara).

3. Przykłady.

A. Sprawdzimy (WdM) dla $m = 2$. Potrzebna będzie znajomość wzoru na sinus oraz cosinus podwojonego argumentu:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Niech α będzie dowolnym ustalonym kątem i przyjmijmy $w = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$. Wtedy

$$w^2 = (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha = \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$$

i wzór de Moivre'a „działa”.

A’. W analogiczny sposób można wyprowadzać wzory na sinus/cosinus wielokrotności danego kąta. Przykładowo zobaczmy przypadek $m = 3$. Mamy

$$\begin{aligned} w^3 &= (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \cdot i \sin \alpha + 3 \cos \alpha \cdot i^2 \sin^2 \alpha + i^3 \sin^3 \alpha = \\ &= \underbrace{\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha}_{=\cos(3\alpha)} + i \underbrace{\left(\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \right)}_{=\sin(3\alpha)}. \end{aligned}$$

B. Za pomocą wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$1 + w + w^2 + \dots + w^n = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} \quad \text{dla } w \neq 1$$

można wyprowadzić wzór na sumę kolejnych krotności funkcji sinus (lub cosinus). Jeśli chcemy obliczyć wartość sumy

$$\sin \alpha + \sin(2\alpha) + \sin(3\alpha) + \dots + \sin(20\alpha),$$

to przyjmując $w = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$ rozważamy sumę

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{20} = 1 + \cos \alpha + \cos(2\alpha) + \dots + \cos(20\alpha) + i(\sin \alpha + \sin(2\alpha) + \sin(3\alpha) + \dots + \sin(20\alpha)).$$

Z własności ciągu geometrycznego jest ona jednocześnie równa (dla $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, aby było $w \neq 1$)

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{20} = \frac{w^{21} - 1}{w - 1} = \frac{\cos(21\alpha) - 1 + i \sin(21\alpha)}{\cos \alpha - 1 + i \sin \alpha}.$$

Pozostaje usunąć symbol i z mianownika (używając wzoru na różnicę kwadratów – podobnie jak usuwa się z ułamków niewymierności kwadratowe). Wtedy część rzeczywista oraz część urojona otrzymanego wyrażenia to odpowiednio suma cosinusów oraz sinusów kolejnych wielokrotności kąta α .

C Zauważmy jeszcze, że dla dowolnego kąta α , jeżeli $w = \cos \alpha + i \sin \alpha$, to także

$$\frac{1}{z} = \cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha) = \cos \alpha - i \sin \alpha.$$

Oznacza to, że

$$\cos \alpha = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin \alpha = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}.$$

Równości te pozwalają na dość mechaniczne wyprowadzanie różnych zależności trygonometrycznych. Przykładowo: chcąc przedstawić wyrażenie $\cos^3 \alpha \sin \alpha$ w postaci sumy pewnych funkcji trygonometrycznych (w potęgze 1), możemy postąpić jak niżej.

$$\begin{aligned}\cos^3 \alpha \sin \alpha &= \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right)^3 \cdot \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right) = \frac{1}{16i} \left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} \right) \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) = \\ &= \frac{1}{16i} \left(z^4 - \frac{1}{z^4} + 2 \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{z^4 - \frac{1}{z^4}}{2i} + \frac{1}{4} \cdot \frac{z^2 - \frac{1}{z^2}}{2i} = \\ &= \frac{1}{8} \sin(4\alpha) + \frac{1}{4} \sin(2\alpha).\end{aligned}$$

4. Gdy wiemy, że mnożenie dwóch liczb zespolonych odpowiada geometrycznie sumowaniu dwóch kątów (związanych z danymi liczbami), nietrudno zobaczyć, że dzielenie pary liczb zespolonych będzie algebraicznym odpowiednikiem odejmowania danych kątów. Dokładniej, gdy

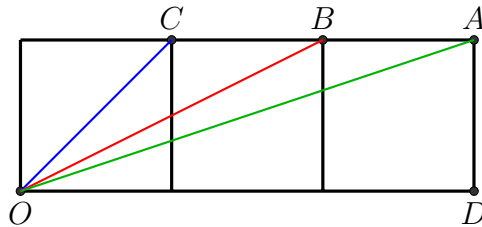
$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \text{oraz} \quad w = \cos \beta + i \sin \beta,$$

to mamy

$$zw = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \quad \text{i jednocześnie} \quad \frac{z}{w} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta).$$

Warto też uświadomić sobie, że jeśli na płaszczyźnie dany punkt $P = (a, b)$ jest oddalony od $(0, 0)$ o wartość inną niż 1, to mnożenie przez liczbę zespoloną $z = a + i \cdot b$ jest złożeniem obrotu (o kąt wyznaczony przez dodatnią część osi Ox oraz półprostą $OP^{\rightarrow}$) i jednokładności o środku w $(0, 0)$ i skali równej $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (czyli takiej jak długość odcinka OP).

Ćwiczenie. Trzy jednakowe kwadraty ustawiono obok siebie jak na rysunku. Niech $\alpha = \angle AOD$, $\beta = \angle BOD$, $\gamma = \angle COD$.



Ile wynosi miara kąta $\alpha + \beta + \gamma$?

Odpowiedź. Wprowadzamy układ współrzędnych tak, aby $O = (0, 0)$ oraz $A = (3, 1)$, $B = (2, 1)$ i $C = (1, 1)$. Wtedy punkty te utożsamiamy z liczbami zespolonymi $A = 3 + i$, $B = 2 + i$ oraz $C = 1 + i$. Iloczyn tych liczb będzie odpowiadał obrotowi (i być może jakiejś jednokładności) o kąt $\alpha + \beta + \gamma$. Mamy

$$ABC = (3 + i)(2 + i)(1 + i) = (3 + i)(2 + 3i - 1) = (3 + i)(1 + 3i) = 3 + 9i + i - 3 = 10i.$$

Otrzymana wartość daje punkt $(0, 10)$, który odpowiada geometrycznie obrotowi o kąt 90° (i jednokładność o skali 10), stąd $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Zadanie. Rozważamy liczby $w = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$ oraz $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$. Obliczając wz oraz $\frac{w}{z}$ podać dokładne wartości dla $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{13\pi}{12}$, $\cos \frac{13\pi}{12}$.

Zadanie 1.

Mnożąc liczby zespolone $z = 2 + 2i$ oraz $w = \sqrt{3} - i$ wyznaczyć dokładną wartość $\cos \frac{\pi}{12}$.

Rozwiązanie. Ponieważ

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{zaś} \quad w = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right),$$

to $zw = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$. Z drugiej strony $zw = (2 + 2i)(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{3} + 2 + i(2\sqrt{3} - 2)$.

Stąd **odpowiedź:** $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{2\sqrt{2} + 2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Zadanie 2.

Wiedząc, że $\sin \varphi = \frac{2}{3}$ oraz $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ oblicz (używając liczb zespolonych) wartość $\cos(3\varphi)$.

Rozwiązanie. Niech $z = \sin \varphi + i \cos \varphi$. Ponieważ $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, to $\cos \varphi = -\sqrt{1 - \frac{2^2}{3^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Wtedy

$$\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = z^3 = \left(\frac{2}{3} - i \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^3.$$

Odpowiedź: $\cos(3\varphi) = \left(\frac{2}{3} \right)^3 + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-i \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 = \frac{8}{27} - \frac{10}{9} = -\frac{22}{27}$.

Zadanie 3.

W każdą kratkę pomiędzy wyrażeniami staw (poprawny) znak nierówności $>$ albo $<$

$$\text{a) } \arcsin\left(-\frac{1}{6}\right) \square \operatorname{arctg}(-2^{30}) \quad \text{b) } \arccos \frac{1}{3} \square \operatorname{arctg} \frac{3}{2} \quad \text{c) } \arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{\pi} \square \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie.

a) Mamy $\arcsin\left(-\frac{1}{6}\right) < 0 < \operatorname{arctg}(-2^{30})$, zatem tu należy wpisać znak $\square$.

b) Mamy $\arccos \frac{1}{3} > \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} > \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$, zatem tu należy wpisać znak $\square$.

c) Ponieważ $\frac{4}{5} < \frac{3}{\pi}$ oraz dla dowolnego $x \in [-1, 1]$ mamy $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, to

$$\arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{\pi} > \arccos \frac{4}{5} + \arcsin \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}.$$

Tu dobrym wyborem jest więc $\square$.

Zadanie 4.

Wyznacz wartość wyrażenia $W = \operatorname{tg}(\arcsin(-2y) + \arccos(2y) + \operatorname{arctg}(2y))$, wobec warunku $\arccos y = \frac{2\pi}{3}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $y = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, to

$$W = \operatorname{tg}(\arcsin(-1) + \arccos(1) + \operatorname{arctg}(1)) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$