

OCZYWISTE???

czyli

manowce intuicji

Oczywiste?

- O godzinie 3:15 wskazówki zegara pokrywają się.

Oczywiste?

- O godzinie 3:15 wskazówki zegara pokrywają się.
- 5 pajaków w ciągu 5 godzin łapie 5 much.

Ile much złapie 10 pajaków w ciągu 10 godzin?

Oczywiste?

- O godzinie 3:15 wskazówki zegara pokrywają się.

- 5 pajaków w ciągu 5 godzin łapie 5 much.

Ile much złapie 10 pajaków w ciągu 10 godzin?

- Pole której z następujących figur nigdy nie może być liczbą wymierną?

(a) kwadratu (b) trójkąta (c) koła (d) prostokąta

Oczywiste?

- O godzinie 3:15 wskazówki zegara pokrywają się.

- 5 pajaków w ciągu 5 godzin łapie 5 much.

Ile much złapie 10 pajaków w ciągu 10 godzin?

- Pole której z następujących figur nigdy nie może być liczbą wymierną?

(a) kwadratu (b) trójkąta (c) koła (d) prostokąta

- Nierówności można stronami dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

Oczywiste?

- O godzinie 3:15 wskazówki zegara pokrywają się.

- 5 pajaków w ciągu 5 godzin łapie 5 much.

Ile much złapie 10 pajaków w ciągu 10 godzin?

- Pole której z następujących figur nigdy nie może być liczbą wymierną?

(a) kwadratu (b) trójkąta (c) koła (d) prostokąta

- Nierówności można stronami dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

$$8 < 9$$

$$1 < 6$$

Oczywiste?

- O godzinie 3:15 wskazówki zegara pokrywają się.
- 5 pajaków w ciągu 5 godzin łapie 5 much.
Ile much złapie 10 pajaków w ciągu 10 godzin?
- Pole której z następujących figur nigdy nie może być liczbą wymierną?
(a) kwadratu (b) trójkąta (c) koła (d) prostokąta
- Nierówności można stronami dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

$$8 < 9$$

$$1 < 6$$

$$7 < 3$$

Oczywiste?

- O godzinie 3:15 wskazówki zegara pokrywają się.

- 5 pajaków w ciągu 5 godzin łapie 5 much.

Ile much złapie 10 pajaków w ciągu 10 godzin?

- Pole której z następujących figur nigdy nie może być liczbą wymierną?

(a) kwadratu (b) trójkąta (c) koła (d) prostokąta

- Nierówności można stronami dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić.

$$8 < 9$$

$$1 < 6$$

$$7 < 3$$

Sugestywnie brzmiące bzdury!

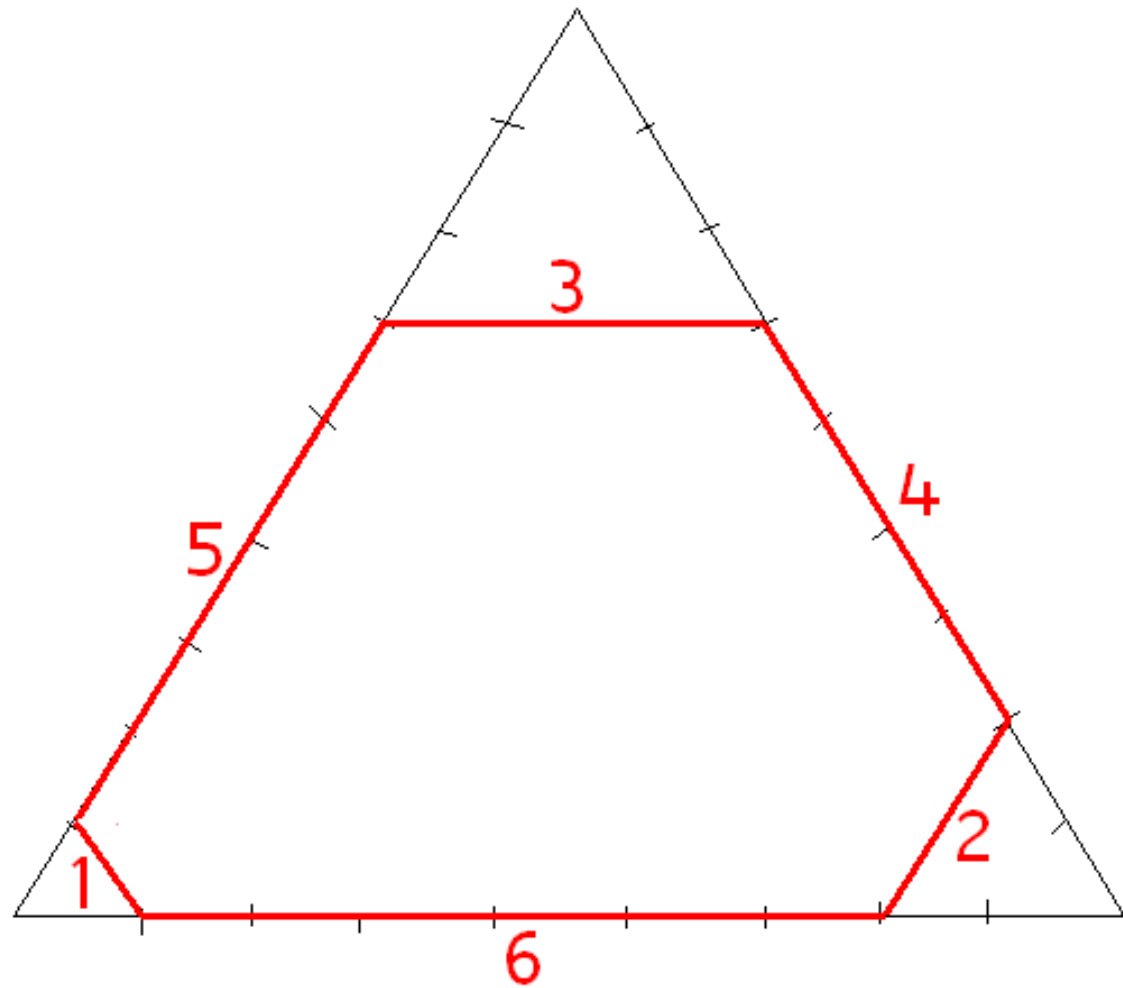
Sześciokąt foremny?

Sześciokąt wypukły ma wszystkie kąty równe 120° . Oczywiście jest on foremny.

Sześciokąt foremny?

Sześciokąt wypukły ma wszystkie kąty równe 120° . Oczywiście jest on foremny.

★ ★ ★



Może nawet mieć każdy bok innej długości!

Encyklopedia

Na półce stoi dwutomowa encyklopedia, ustawiona „zwyczajnie”.
Każdy tom ma 5 cm grubości oraz okładki grubości po 0,5 cm.

Encyklopedia

Na półce stoi dwutomowa encyklopedia, ustawiona „zwyczajnie”.

Każdy tom ma 5 cm grubości oraz okładki grubości po 0,5 cm.

Mól książkowy zaczyna przegryzać się przez tę encyklopedię.

Startuje od pierwszej strony pierwszego tomu i podąża najkrótszą drogą do ostatniej strony ostatniego tomu. Jaką drogę pokona?

Encyklopedia

Na półce stoi dwutomowa encyklopedia, ustawiona „zwyczajnie”.

Każdy tom ma 5 cm grubości oraz okładki grubości po 0,5 cm.

Mól książkowy zaczyna przegryzać się przez tę encyklopedię.

Startuje od pierwszej strony pierwszego tomu i podąża najkrótszą drogą do ostatniej strony ostatniego tomu. Jaką drogę pokona?

R. Oczywiście 2 tomy po 5 cm plus dwie okładki po 0,5 cm, razem 11 cm.

Encyklopedia

Na półce stoi dwutomowa encyklopedia, ustawiona „zwyczajnie”.

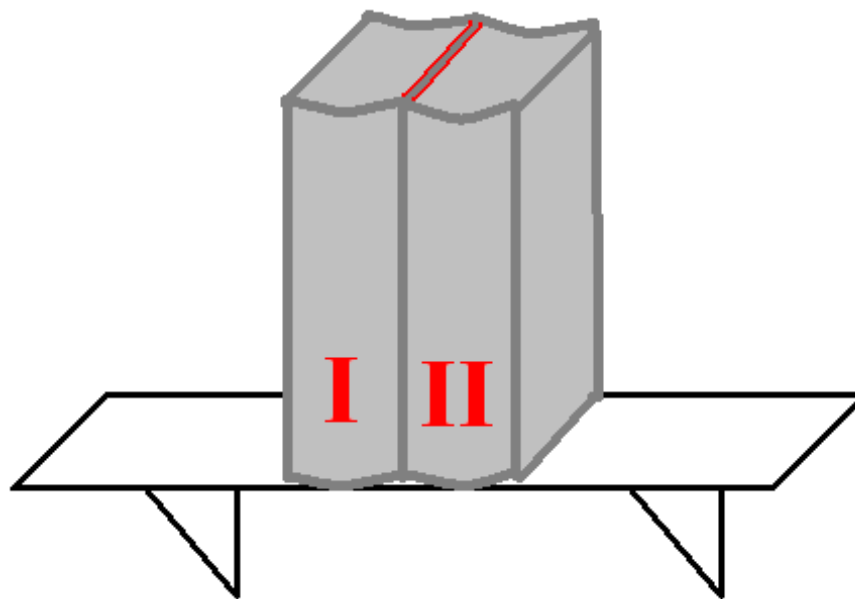
Każdy tom ma 5 cm grubości oraz okładki grubości po 0,5 cm.

Mól książkowy zaczyna przegryzać się przez tę encyklopedię.

Startuje od pierwszej strony pierwszego tomu i podąża najkrótszą drogą do ostatniej strony ostatniego tomu. Jaką drogę pokona?

R. Oczywiście 2 tomy po 5 cm plus dwie okładki po 0,5 cm, razem 11 cm.

★ ★ ★



Encyklopedia

Na półce stoi dwutomowa encyklopedia, ustawiona „zwyczajnie”.

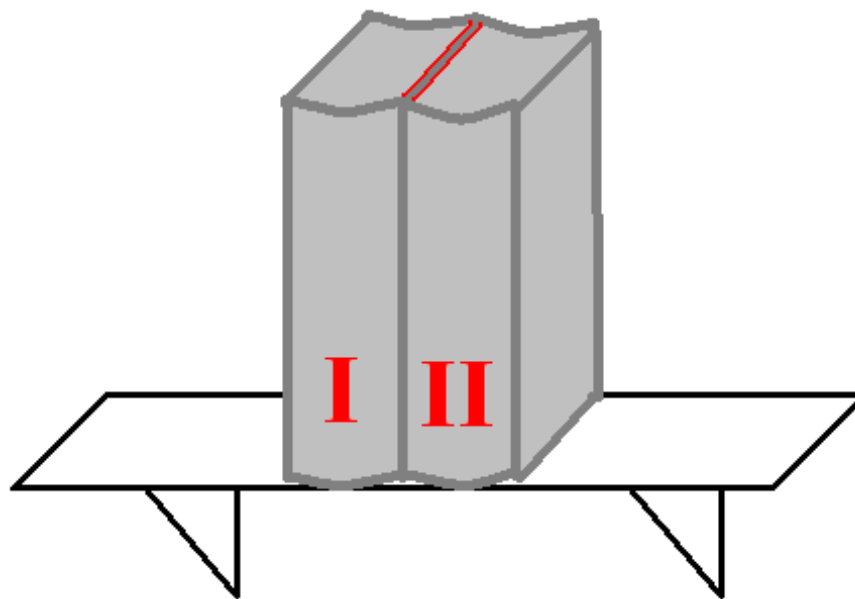
Każdy tom ma 5 cm grubości oraz okładki grubości po 0,5 cm.

Mól książkowy zaczyna przegryzać się przez tę encyklopedię.

Startuje od pierwszej strony pierwszego tomu i podąża najkrótszą drogą do ostatniej strony ostatniego tomu. Jaką drogę pokona?

R. Oczywiście 2 tomy po 5 cm plus dwie okładki po 0,5 cm, razem 11 cm.

★ ★ ★



Tylko okładki, czyli 2 razy 0,5 cm, razem 1 cm.

Statystyka

W czasie II Wojny Światowej analizowano zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz.

Statystyka

W czasie II Wojny Światowej analizowano zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz.

Planowano wzmocnić najczęściej uszkodzane fragmenty.

Statystyka

W czasie II Wojny Światowej analizowano zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz.

Planowano wzmocnić najczęściej uszkodzane fragmenty.

Matematyk Abraham Wald zasugerował wzmocnienie tych części, które według statystyk uszkodzane były *najrzadziej*. Dlaczego?

Statystyka

W czasie II Wojny Światowej analizowano zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz.

Planowano wzmocnić najczęściej uszkodzane fragmenty.

Matematyk Abraham Wald zasugerował wzmocnienie tych części, które według statystyk uszkodzane były *najrzadziej*. Dlaczego?

★ ★ ★

Analizowano zniszczenia samolotów, które *wróciły*

Statystyka

W czasie II Wojny Światowej analizowano zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz.

Planowano wzmocnić najczęściej uszkodzane fragmenty.

Matematyk Abraham Wald zasugerował wzmocnienie tych części, które według statystyk uszkodzane były *najrzadziej*. Dlaczego?

★ ★ ★

Analizowano zniszczenia samolotów, które *wróciły*, czyli ich uszkodzenia nie uniemożliwiły im dalszego lotu.

Statystyka

W czasie II Wojny Światowej analizowano zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz.

Planowano wzmocnić najczęściej uszkodzane fragmenty.

Matematyk Abraham Wald zasugerował wzmocnienie tych części, które według statystyk uszkodzane były *najrzadziej*. Dlaczego?

★ ★ ★

Analizowano zniszczenia samolotów, które *wróciły*, czyli ich uszkodzenia nie uniemożliwiły im dalszego lotu.

Najrzadziej obserwowane uszkodzenia były najgroźniejsze — to one powodowały, że dany samolot nie wracał.

Statystyka — błąd przeżywalności (ang. *survival bias*)

W czasie II Wojny Światowej analizowano zniszczenia ostrzelanych samolotów wojskowych powracających do amerykańskich baz.

Planowano wzmocnić najczęściej uszkodzane fragmenty.

Matematyk Abraham Wald zasugerował wzmocnienie tych części, które według statystyk uszkodzane były *najrzadziej*. Dlaczego?

★ ★ ★

Analizowano zniszczenia samolotów, które *wróciły*, czyli ich uszkodzenia nie uniemożliwiły im dalszego lotu.

Najrzadziej obserwowane uszkodzenia były najgroźniejsze — to one powodowały, że dany samolot nie wracał.

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów.

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów. Procent przyjętych kobiet dla obu był **wyższy!**

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów. Procent przyjętych kobiet dla obu był **wyższy!**

Jak to możliwe?

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów. Procent przyjętych kobiet dla obu był **wyższy!**

Jak to możliwe?

★ ★ ★

	K	M
I	75%	60%
II	50%	25%

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów. Procent przyjętych kobiet dla obu był **wyższy!**

Jak to możliwe?

★ ★ ★

	K	M	kandydaci	K	M
I	75%	60%	I	4	100
II	50%	25%	II	100	4

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów. Procent przyjętych kobiet dla obu był **wyższy!**

Jak to możliwe?

★ ★ ★

	K	M
I	75%	60%
II	50%	25%

kandydaci	K	M
I	4	100
II	100	4

przyjęci	K	M
I	3	60
II	50	1

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów. Procent przyjętych kobiet dla obu był **wyższy!**

Jak to możliwe?

★ ★ ★

	K	M
I	75%	60%
II	50%	25%

kandydaci	K	M
I	4	100
II	100	4
razem	104	104

przyjęci	K	M
I	3	60
II	50	1
razem	53	61

Paradoks Simpsona

Pewnej uczelni zarzucono dyskryminację przy rekrutacji na studia doktoranckie — przyjęła mniejszy procent kandydujących kobiet niż mężczyzn.

Uczelnia porównała procenty przyjętych kobiet i mężczyzn osobno dla każdego ze swoich dwóch wydziałów. Procent przyjętych kobiet dla obu był **wyższy!**

Jak to możliwe?

★ ★ ★

	K	M
I	75%	60%
II	50%	25%

kandydaci	K	M
I	4	100
II	100	4
razem	104	104

przyjęci	K	M
I	3	60
II	50	1
razem	53	61

Paradoks szczepionki

Proste rachunki

W porcie zacumowano łódkę. Z jej burty wisi drabinka, której piąty od dołu szczebel jest dokładnie pod powierzchnią wody.

Proste rachunki

W porcie zacumowano łódkę. Z jej burty wisi drabinka, której piąty od dołu szczebel jest dokładnie pod powierzchnią wody.

Każdy szczebel drabinki ma 2 cm grubości, odległość między kolejnymi szczeblami to 20 cm.

Proste rachunki

W porcie zacumowano łódkę. Z jej burty wisi drabinka, której piąty od dołu szczebel jest dokładnie pod powierzchnią wody.

Każdy szczebel drabinki ma 2 cm grubości, odległość między kolejnymi szczeblami to 20 cm.

Przypływ podwyższa poziom wody o 30 cm na godzinę. Ile szczebli będzie pod wodą po 3 godzinach?

Proste rachunki

W porcie zacumowano łódkę. Z jej burty wisi drabinka, której piąty od dołu szczebel jest dokładnie pod powierzchnią wody.

Każdy szczebel drabinki ma 2 cm grubości, odległość między kolejnymi szczeblami to 20 cm.

Przypływ podwyższa poziom wody o 30 cm na godzinę. Ile szczebli będzie pod wodą po 3 godzinach?

R. Łatwo policzyć:

3 godziny po 30 cm to 90 cm,

każde 22 cm to kolejny przykryty szczebel,

$$90 = 4 \cdot 22 + 2,$$

więc po 3 godzinach pod wodą będzie łącznie 9 szczebli.

Proste rachunki

W porcie zacumowano łódkę. Z jej burty wisi drabinka, której piąty od dołu szczebel jest dokładnie pod powierzchnią wody.

Każdy szczebel drabinki ma 2 cm grubości, odległość między kolejnymi szczeblami to 20 cm.

Przypływ podwyższa poziom wody o 30 cm na godzinę. Ile szczebli będzie pod wodą po 3 godzinach?

R. Łatwo policzyć:

3 godziny po 30 cm to 90 cm,

każde 22 cm to kolejny przykryty szczebel,

$$90 = 4 \cdot 22 + 2,$$

więc po 3 godzinach pod wodą będzie łącznie 9 szczebli.

★ ★ ★

Pięć, tak jak było, bo poziom wody nie zmienia się względem łódki.

Czy precyzyjnie się myślisz?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.
Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak,
żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Czy precyzyjnie się myślisz?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.

Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak,
żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Oczywiście otrzymana szczelina jest rozmiarów mikroskopijnych.

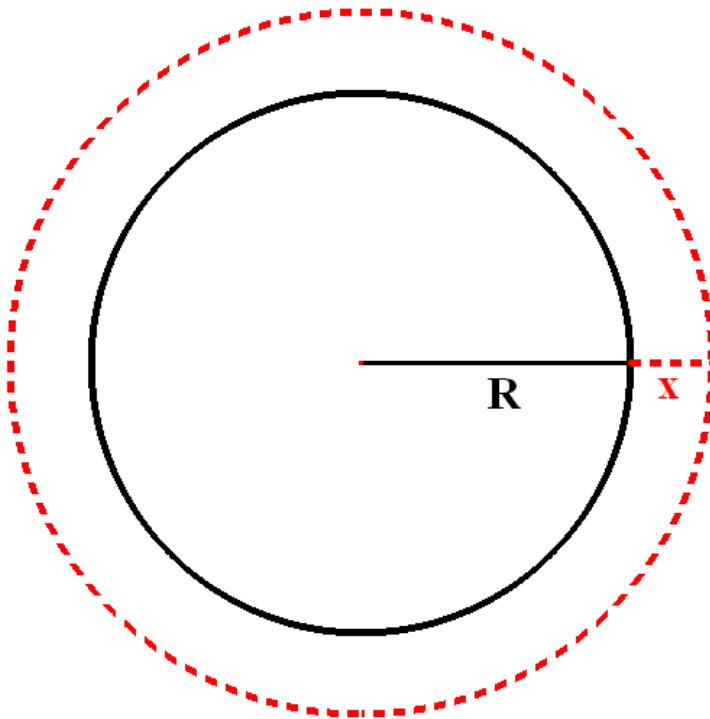
Czy przecięśnie się mysz?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.

Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak,
żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Oczywiście otrzymana szczelina jest rozmiarów mikroskopijnych.

★ ★ ★



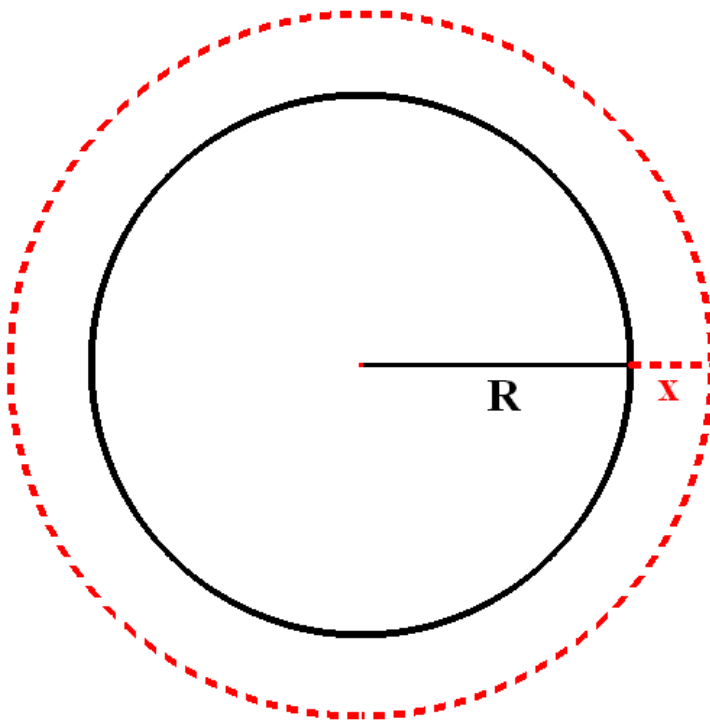
Czy przecięśnie się mysz?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.

Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak, żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Oczywiście otrzymana szczelina jest rozmiarów mikroskopijnych.

★ ★ ★



$$2\pi(R + x) = 2\pi R + 1$$

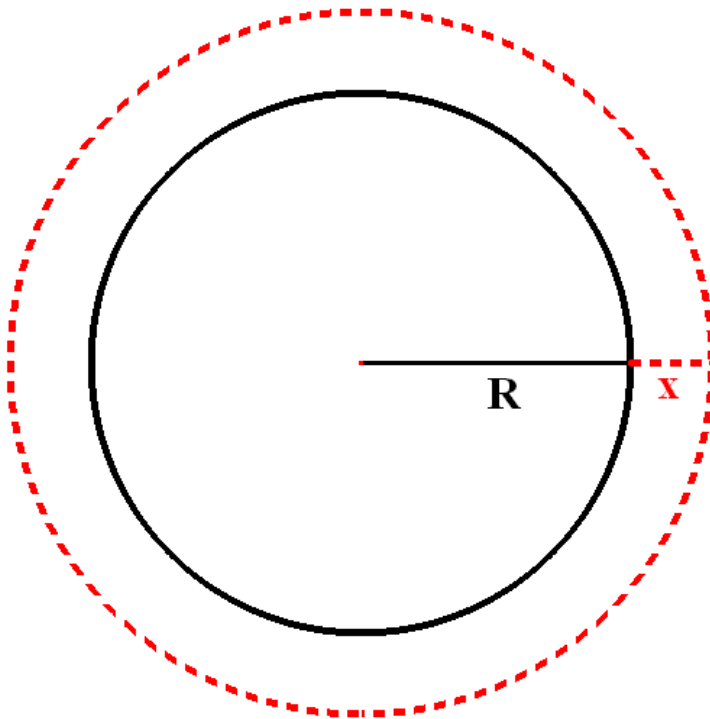
Czy precyzyjnie się myś?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.

Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak, żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Oczywiście otrzymana szczelina jest rozmiarów mikroskopijnych.

★ ★ ★



$$2\pi(R + x) = 2\pi R + 1$$

$$2\pi R + 2\pi x = 2\pi R + 1$$

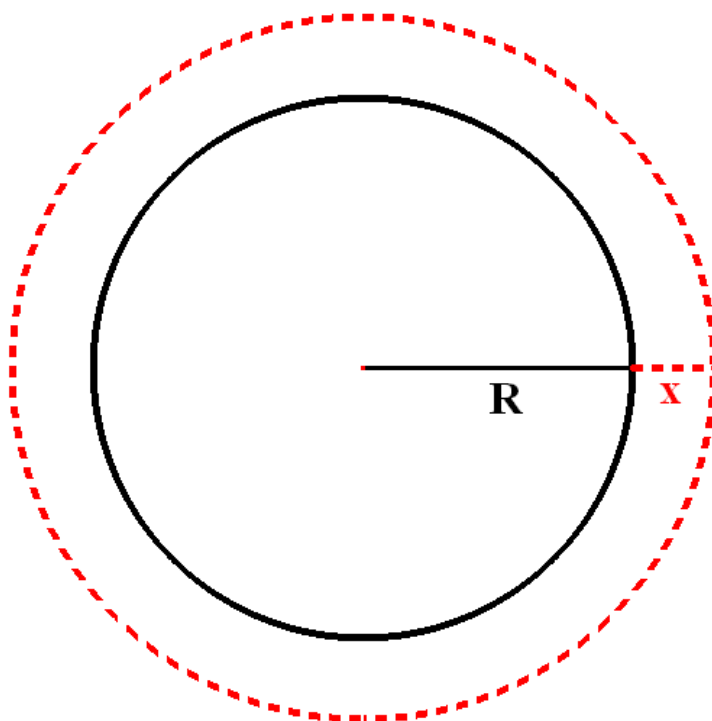
Czy przecięśnie się mysz?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.

Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak, żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Oczywiście otrzymana szczelina jest rozmiarów mikroskopijnych.

★ ★ ★



$$2\pi(R + x) = 2\pi R + 1$$

$$2\pi R + 2\pi x = 2\pi R + 1$$

$$2\pi x = 1$$

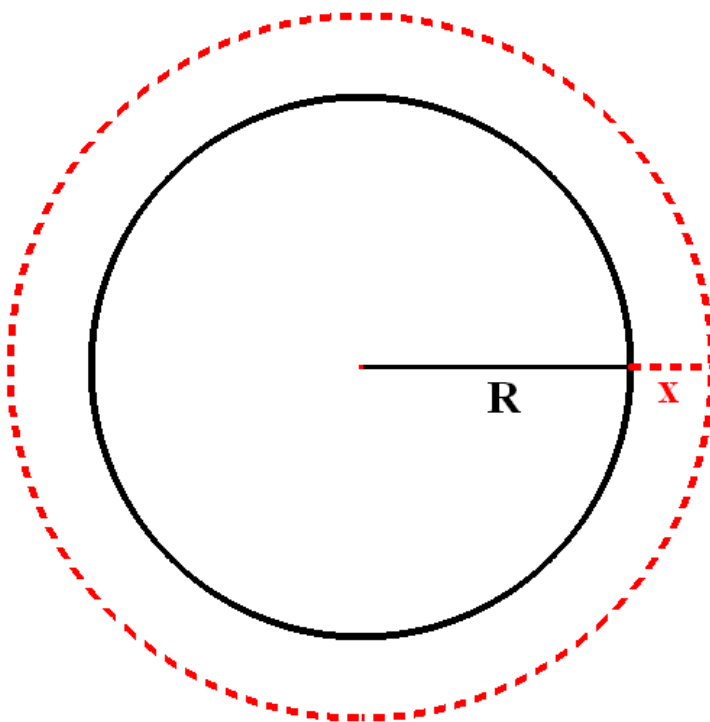
Czy przecięśnie się mysz?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.

Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak, żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Oczywiście otrzymana szczelina jest rozmiarów mikroskopijnych.

★ ★ ★



$$2\pi(R + x) = 2\pi R + 1$$

$$2\pi R + 2\pi x = 2\pi R + 1$$

$$2\pi x = 1$$

$$x = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{6,28} \approx 0,16$$

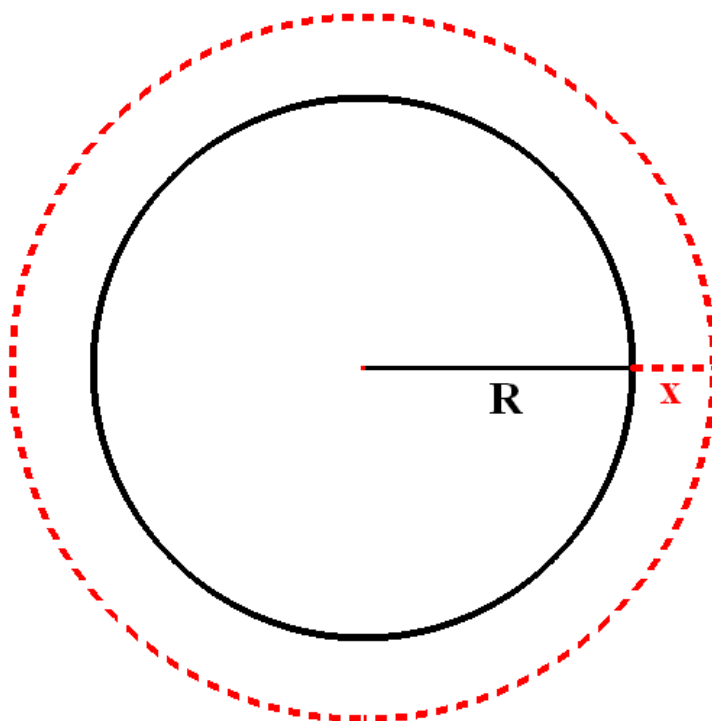
Czy przecięnie się mysz?

Wyobraźmy sobie ziemski równik jako stalową taśmę.

Wydłużamy tę taśmę o 1 m i umieszczamy tak, żeby równomiernie odstawała od powierzchni Ziemi.

Oczywiście otrzymana szczelina jest rozmiarów mikroskopijnych.

★ ★ ★



$$2\pi(R + x) = 2\pi R + 1$$

$$2\pi R + 2\pi x = 2\pi R + 1$$

$$2\pi x = 1$$

$$x = \frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{6,28} \approx 0,16$$

Rezultat nie zależy od promienia!

$$6 \times 6$$

Kwadrat podzielono na 36 mniejszych kwadratów. Pole 35 z nich jest równe 1.

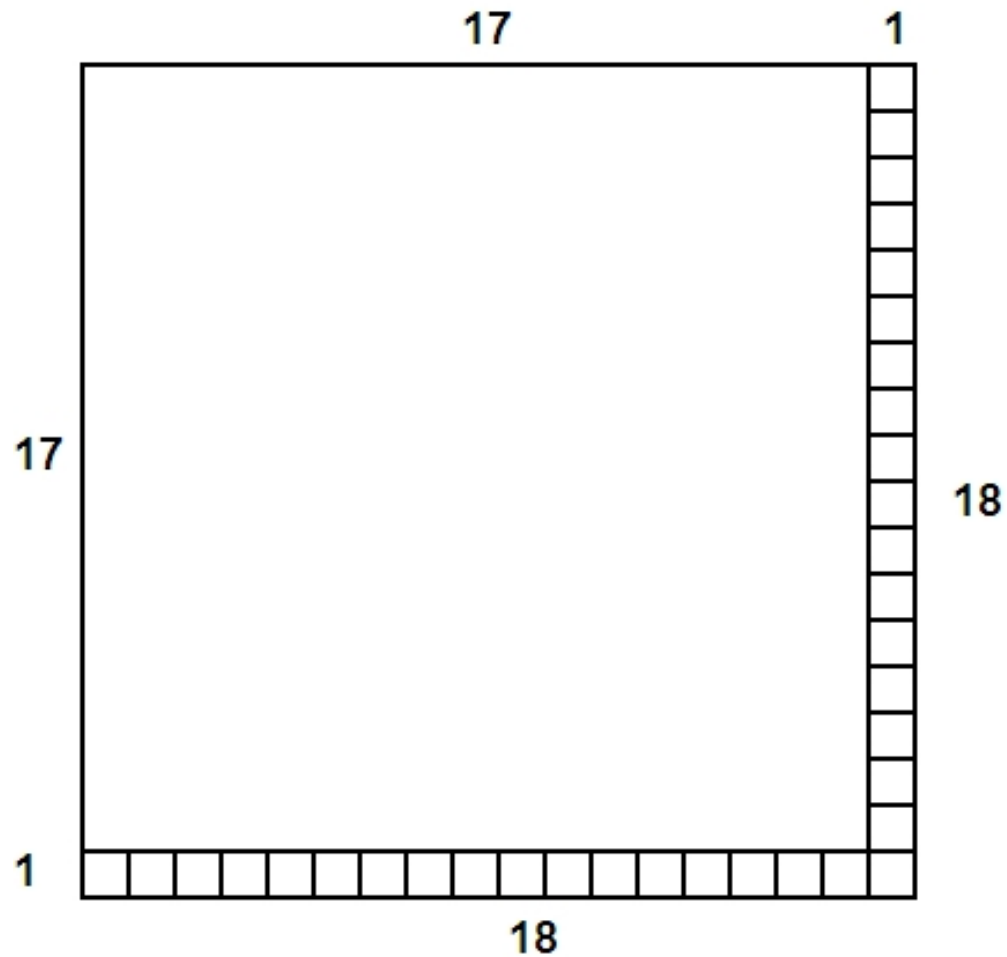
$$6 \times 6$$

Kwadrat podzielono na 36 mniejszych kwadratów. Pole 35 z nich jest równe 1. Oczywiście musi to być podział 6×6 i pole ostatniego też musi być równe 1.

$$6 \times 6$$

Kwadrat podzielono na 36 mniejszych kwadratów. Pole 35 z nich jest równe 1. Oczywiście musi to być podział 6×6 i pole ostatniego też musi być równe 1.

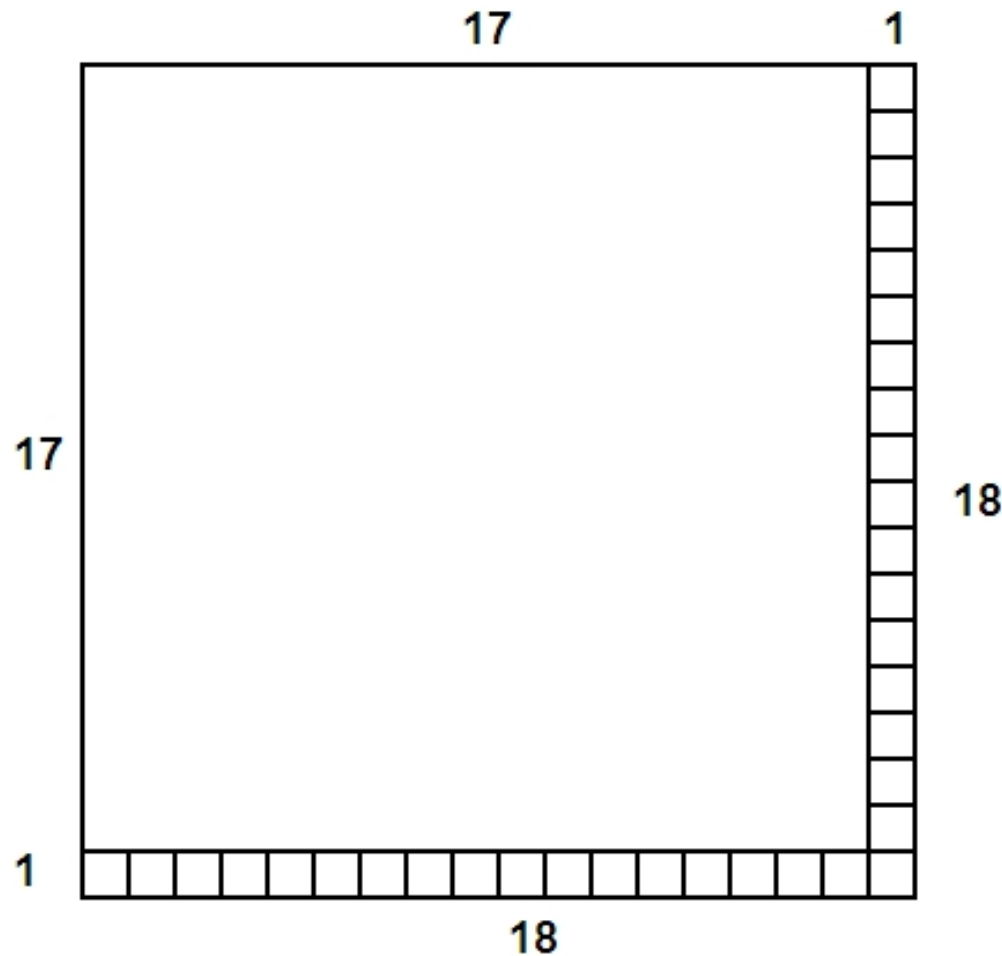
★ ★ ★



$$6 \times 6$$

Kwadrat podzielono na 36 mniejszych kwadratów. Pole 35 z nich jest równe 1. Oczywiście musi to być podział 6×6 i pole ostatniego też musi być równe 1.

★ ★ ★

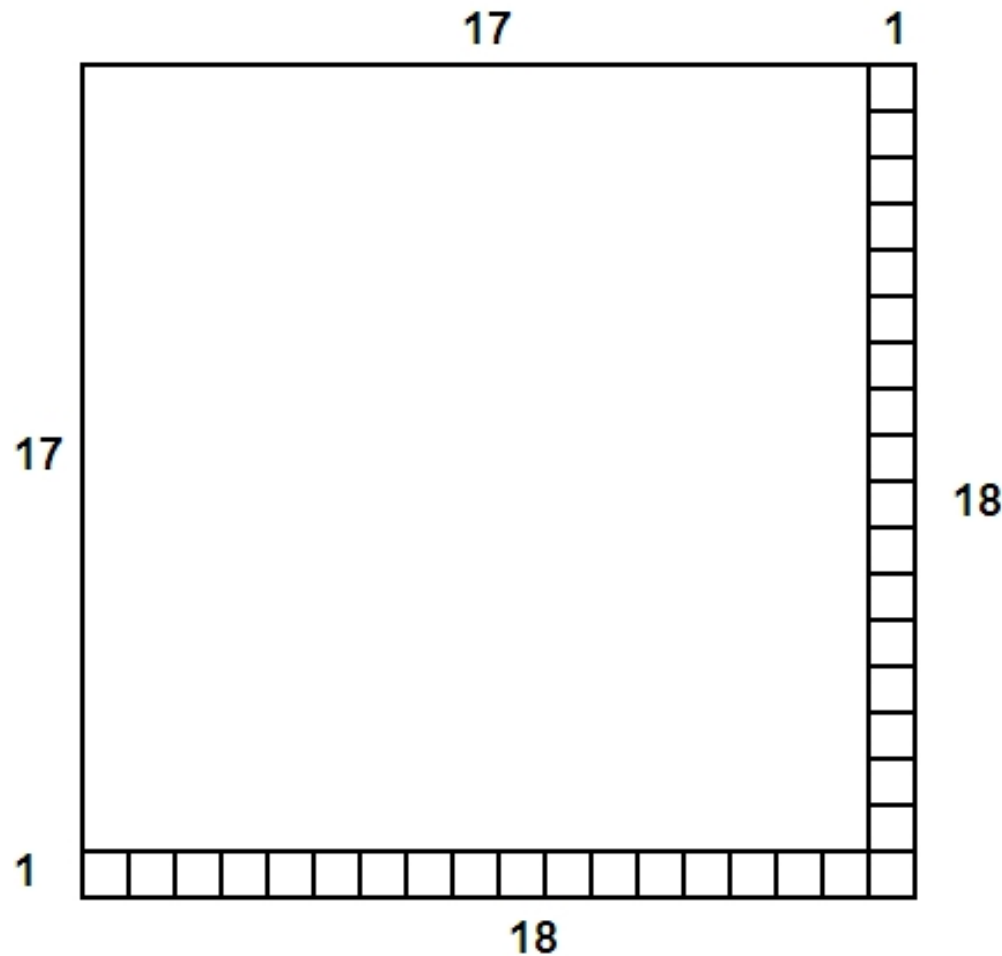


Czy są inne możliwości?

$$6 \times 6$$

Kwadrat podzielono na 36 mniejszych kwadratów. Pole 35 z nich jest równe 1. Oczywiście musi to być podział 6×6 i pole ostatniego też musi być równe 1.

★ ★ ★



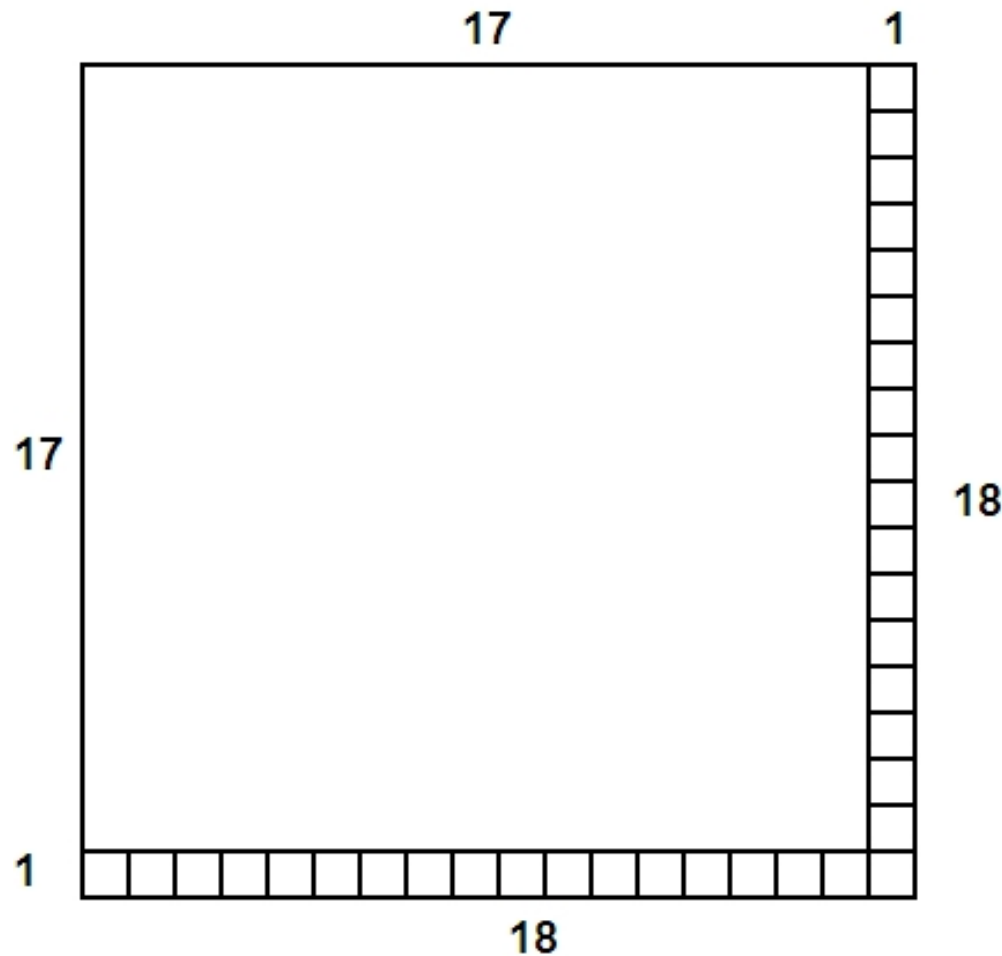
Czy są inne możliwości?

$$n^2 = 35 + k^2$$

$$6 \times 6$$

Kwadrat podzielono na 36 mniejszych kwadratów. Pole 35 z nich jest równe 1. Oczywiście musi to być podział 6×6 i pole ostatniego też musi być równe 1.

★ ★ ★



Czy są inne możliwości?

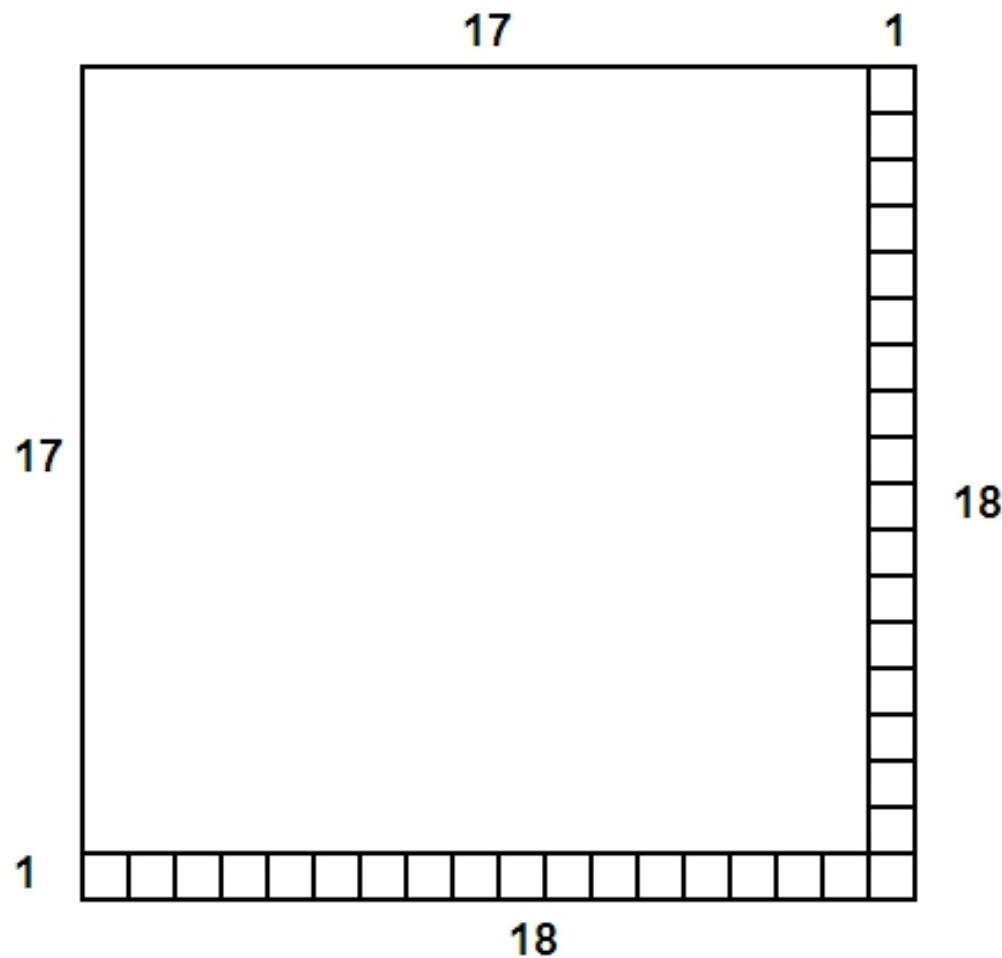
$$n^2 = 35 + k^2$$

$$n^2 - k^2 = 35$$

$$6 \times 6$$

Kwadrat podzielono na 36 mniejszych kwadratów. Pole 35 z nich jest równe 1. Oczywiście musi to być podział 6×6 i pole ostatniego też musi być równe 1.

★ ★ ★



Czy są inne możliwości?

$$n^2 = 35 + k^2$$

$$n^2 - k^2 = 35$$

$$(n + k)(n - k) = 35 \cdot 1 = 7 \cdot 5$$

Średnia pensja

Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia mniej, niż wynosi średnia płaca w tej firmie.

Średnia pensja

Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia mniej, niż wynosi średnia płaca w tej firmie.

Protesty ustały, gdy szef

Średnia pensja

Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia mniej, niż wynosi średnia płaca w tej firmie.

Protesty ustały, gdy szef **obniżył** jednemu z nich pensję. Jak to możliwe?

Średnia pensja

Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia mniej, niż wynosi średnia płaca w tej firmie.

Protesty ustały, gdy szef **obniżył** jednemu z nich pensję. Jak to możliwe?

★ ★ ★

Przed protestami:

- szef: 11 000 zł
- pracownicy: 10 000 zł

Średnia pensja

Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia mniej, niż wynosi średnia płaca w tej firmie.

Protesty ustały, gdy szef **obniżył** jednemu z nich pensję. Jak to możliwe?

★ ★ ★

Przed protestami:

- szef: 11 000 zł
- pracownicy: 10 000 zł

Średnia powyżej 10 000 zł.

Średnia pensja

Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia mniej, niż wynosi średnia płaca w tej firmie.

Protesty ustały, gdy szef **obniżył** jednemu z nich pensję. Jak to możliwe?

★ ★ ★

Przed protestami:

- szef: 11 000 zł
- pracownicy: 10 000 zł

Średnia powyżej 10 000 zł.

Po protestach:

- szef: 11 000 zł
- jeden pracownik: 8 000 zł
- pozostali pracownicy: 10 000 zł

Średnia pensja

Pracownicy pewnej firmy protestowali, że większość z nich zarabia mniej, niż wynosi średnia płaca w tej firmie.

Protesty ustały, gdy szef **obniżył** jednemu z nich pensję. Jak to możliwe?

★ ★ ★

Przed protestami:

- szef: 11 000 zł
- pracownicy: 10 000 zł

Średnia powyżej 10 000 zł.

Po protestach:

- szef: 11 000 zł
- jeden pracownik: 8 000 zł
- pozostali pracownicy: 10 000 zł

Średnia poniżej 10 000 zł.

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h .

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h .

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,
z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,
z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}}$$

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,
z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}}$$

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,

z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = \frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}$$

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,

z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = \frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}$$

Oczywiste?

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 30 km/h.

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,

z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = \frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}$$

Oczywiste?

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 30 km/h.

Łatwo policzyć, z jaką prędkością musi wracać (tą samą drogą), aby średnia prędkość podróży była równa 60 km/h.

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,

z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = \frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}$$

Oczywiste?

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 30 km/h.

Łatwo policzyć, z jaką prędkością musi wracać (tą samą drogą), aby średnia prędkość podróży była równa 60 km/h.

★ ★ ★

$$v_{\text{średnia}} = \frac{2}{\frac{1}{v_{AB}} + \frac{1}{v_{BA}}}$$

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,

z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = \frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}$$

Oczywiste?

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 30 km/h.

Łatwo policzyć, z jaką prędkością musi wracać (tą samą drogą), aby średnia prędkość podróży była równa 60 km/h.

★ ★ ★

$$v_{\text{średnia}} = \frac{2}{\frac{1}{v_{AB}} + \frac{1}{v_{BA}}} = \frac{2v_{AB}v_{BA}}{v_{AB} + v_{BA}}$$

Średnia prędkość

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 40 km/h i z powrotem, tą samą drogą, z prędkością 60 km/h.

Średnia prędkość podróży jest więc oczywiście równa 50 km/h.

★ ★ ★

Z prędkością 40 km/h jechał przez czas $t_{AB} = \frac{AB}{40}$,

z prędkością 60 km/h przez czas $t_{BA} = \frac{AB}{60}$,

$$v_{\text{średnia}} = \frac{AB + BA}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2AB}{\frac{AB}{40} + \frac{AB}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{40} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{5}{120}} = \frac{240}{5} = 48 \text{ km/h}$$

Oczywiste?

Samochód przejechał z miejscowości A do B z prędkością 30 km/h.

Łatwo policzyć, z jaką prędkością musi wracać (tą samą drogą), aby średnia prędkość podróży była równa 60 km/h.

★ ★ ★

$$v_{\text{średnia}} = \frac{2}{\frac{1}{v_{AB}} + \frac{1}{v_{BA}}} = \frac{2v_{AB}v_{BA}}{v_{AB} + v_{BA}} < 2v_{AB}$$

Sprawiedliwość

Pod domem pana Kowalskiego zatrzymują się dwa tramwaje — nr 1 i 2, każdy z nich kursuje co 10 minut.

Sprawiedliwość

Pod domem pana Kowalskiego zatrzymują się dwa tramwaje — nr 1 i 2, każdy z nich kursuje co 10 minut.

Pan Kowalski codziennie o przypadkowej godzinie wychodzi na przystanek i wsiada w pierwszy tramwaj, który podjedzie.

Tramwajem nr 1 dojeżdża do narzeczonej, a tramwajem nr 2 — do matki.

Sprawiedliwość

Pod domem pana Kowalskiego zatrzymują się dwa tramwaje — nr 1 i 2, każdy z nich kursuje co 10 minut.

Pan Kowalski codziennie o przypadkowej godzinie wychodzi na przystanek i wsiada w pierwszy tramwaj, który podjedzie.

Tramwajem nr 1 dojeżdża do narzeczonej, a tramwajem nr 2 — do matki.

Wobec tego pan Kowalski równie często bywa u każdej z nich.

Sprawiedliwość

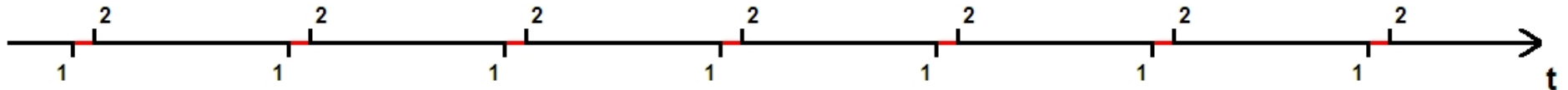
Pod domem pana Kowalskiego zatrzymują się dwa tramwaje — nr 1 i 2, każdy z nich kursuje co 10 minut.

Pan Kowalski codziennie o przypadkowej godzinie wychodzi na przystanek i wsiada w pierwszy tramwaj, który podjedzie.

Tramwajem nr 1 dojeżdża do narzeczonej, a tramwajem nr 2 — do matki.

Wobec tego pan Kowalski równie często bywa u każdej z nich.

★ ★ ★



Tramwaj nr 1 jeździ o godzinach $xx:x0$,
tramwaj nr 2 jeździ o godzinach $xx:x1$.

Sprawiedliwość

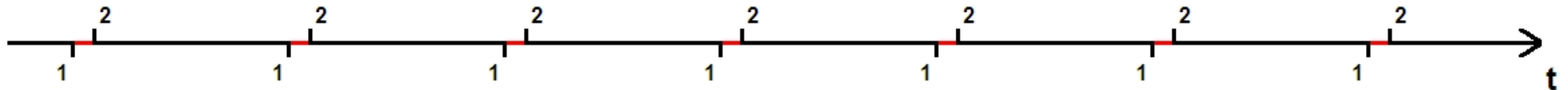
Pod domem pana Kowalskiego zatrzymują się dwa tramwaje — nr 1 i 2, każdy z nich kursuje co 10 minut.

Pan Kowalski codziennie o przypadkowej godzinie wychodzi na przystanek i wsiada w pierwszy tramwaj, który podjedzie.

Tramwajem nr 1 dojeżdża do narzeczonej, a tramwajem nr 2 — do matki.

Wobec tego pan Kowalski równie często bywa u każdej z nich.

★ ★ ★



Tramwaj nr 1 jeździ o godzinach $xx:x0$,
tramwaj nr 2 jeździ o godzinach $xx:x1$.

Pan Kowalski bywa średnio 9 razy częściej u narzeczonej niż u matki!

Paradoks Condorceta

Klasa glosuje pomiędzy trzema opcjami: A , B i C .

Każdy uczeń ma swoje upodobania, które nie zmieniają się, np. $B > C > A$.

Paradoks Condorceta

Klasa glosuje pomiędzy trzema opcjami: A , B i C .

Każdy uczeń ma swoje upodobania, które nie zmieniają się, np. $B > C > A$.

Przegłosowano, że $A > B$ oraz że $B > C$.

Paradoks Condorceta

Klasa glosuje pomiędzy trzema opcjami: A , B i C .

Każdy uczeń ma swoje upodobania, które nie zmieniają się, np. $B > C > A$.

Przegłosowano, że $A > B$ oraz że $B > C$.

Wobec tego nie ma po co głosować pomiędzy opcjami A i C ,
bo jak widać większość uważa, że $A > C$.

Paradoks Condorceta

Klasa głosuje pomiędzy trzema opcjami: A , B i C .

Każdy uczeń ma swoje upodobania, które nie zmieniają się, np. $B > C > A$.

Przegłosowano, że $A > B$ oraz że $B > C$.

Wobec tego nie ma po co głosować pomiędzy opcjami A i C ,
bo jak widać większość uważa, że $A > C$.

★ ★ ★

15 osób uważa, że $C > A > B$

15 osób uważa, że $B > C > A$

1 osoba uważa, że $A > B > C$

Paradoks Condorceta

Klasa głosuje pomiędzy trzema opcjami: A , B i C .

Każdy uczeń ma swoje upodobania, które nie zmieniają się, np. $B > C > A$.

Przegłosowano, że $A > B$ oraz że $B > C$.

Wobec tego nie ma po co głosować pomiędzy opcjami A i C ,
bo jak widać większość uważa, że $A > C$.

★ ★ ★

15 osób uważa, że $C > A > B$

15 osób uważa, że $B > C > A$

1 osoba uważa, że $A > B > C$

30 z 31 osób zagłosuje, że $C > A$

Sprawiedliwy układ?

Kto dziś zmywa? Jaś i Małgosia umówili się, że rzucają monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jeśli wypadnie on w rzucie o numerze nieparzystym, zmywa Jaś, w przeciwnym przypadku zmywa Małgosia. To oczywiście sprawiedliwe.

Sprawiedliwy układ?

Kto dziś zmywa? Jaś i Małgosia umówili się, że rzucają monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jeśli wypadnie on w rzucie o numerze nieparzystym, zmywa Jaś, w przeciwnym przypadku zmywa Małgosia. To oczywiście sprawiedliwe.

★ ★ ★

Jaś:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$$

Sprawiedliwy układ?

Kto dziś zmywa? Jaś i Małgosia umówili się, że rzucają monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jeśli wypadnie on w rzucie o numerze nieparzystym, zmywa Jaś, w przeciwnym przypadku zmywa Małgosia. To oczywiście sprawiedliwe.

★ ★ ★

Jaś:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$$

Małgosia:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

Sprawiedliwy układ?

Kto dziś zmywa? Jaś i Małgosia umówili się, że rzucają monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jeśli wypadnie on w rzucie o numerze nieparzystym, zmywa Jaś, w przeciwnym przypadku zmywa Małgosia. To oczywiście sprawiedliwe.

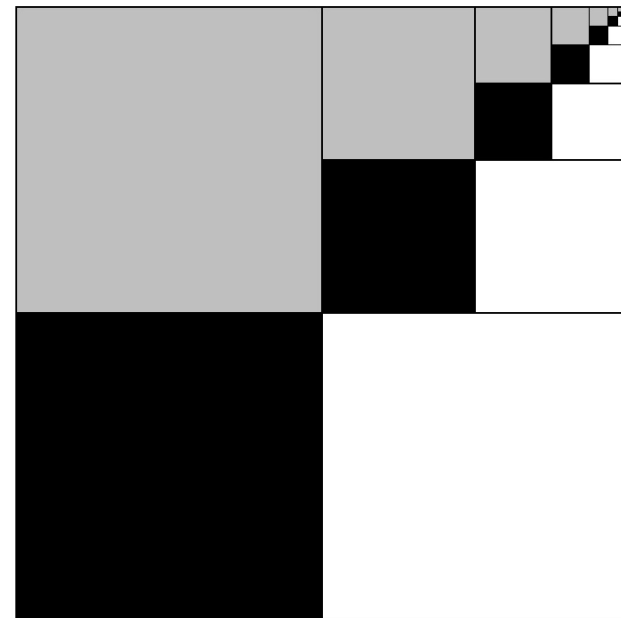
★ ★ ★

Jaś:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$$

Małgosia:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$



Sprawiedliwy układ?

Kto dziś zmywa? Jaś i Małgosia umówili się, że rzucają monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jeśli wypadnie on w rzucie o numerze nieparzystym, zmywa Jaś, w przeciwnym przypadku zmywa Małgosia. To oczywiście sprawiedliwe.

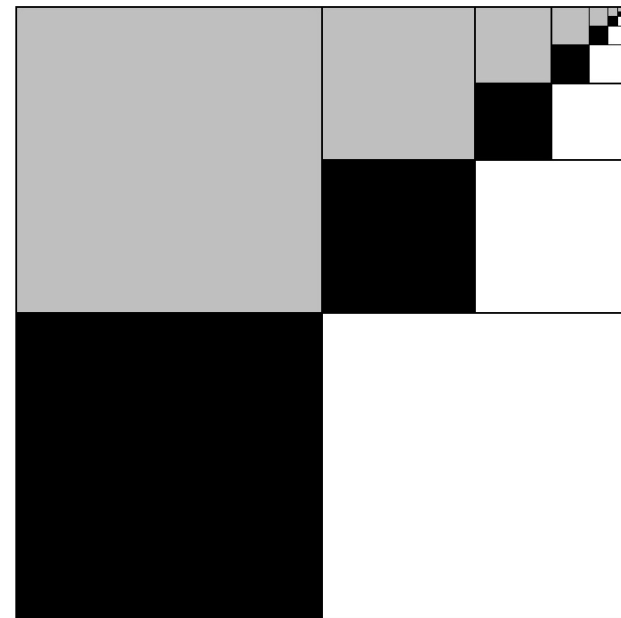
★ ★ ★

Jaś:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$$

Małgosia:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$



Jaś zmywa z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$.

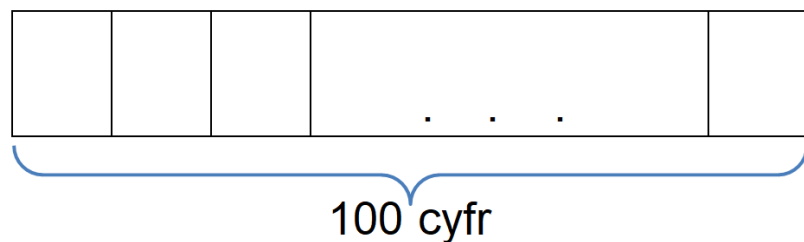
Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

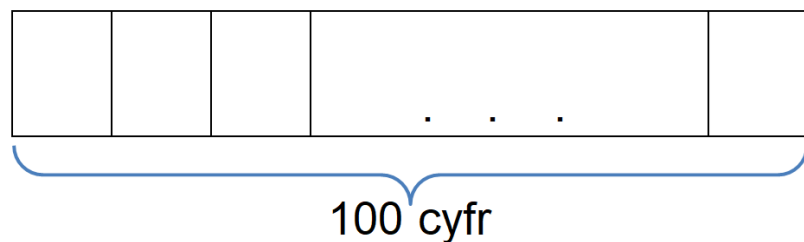
★ ★ ★



Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

★ ★ ★

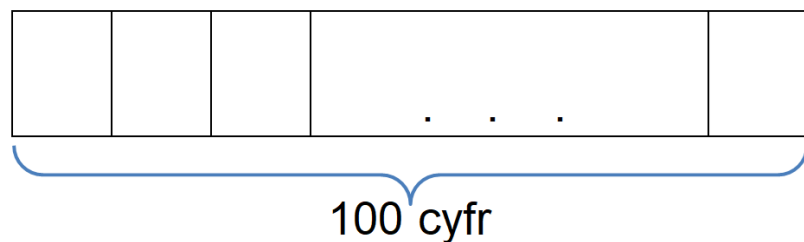


Liczb bez cyfry 7 jest 9^{100} .

Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

★ ★ ★



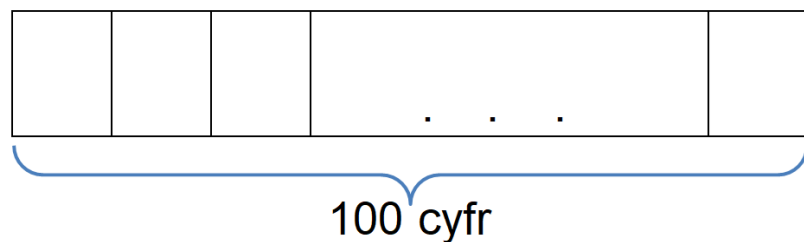
Liczb bez cyfry 7 jest 9^{100} .

$$\frac{9^{100}}{10^{100}} \stackrel{?}{>} \frac{1}{2}$$

Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

★ ★ ★



Liczb bez cyfry 7 jest 9^{100} .

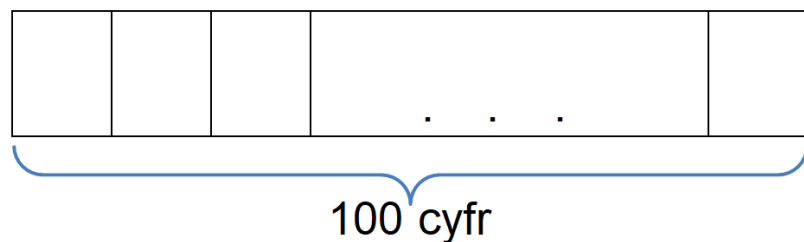
$$\frac{9^{100}}{10^{100}} \stackrel{?}{>} \frac{1}{2}$$

$$(0,9)^2 = 0,81$$

Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

★ ★ ★



Liczb bez cyfry 7 jest 9^{100} .

$$\frac{9^{100}}{10^{100}} \stackrel{?}{>} \frac{1}{2}$$

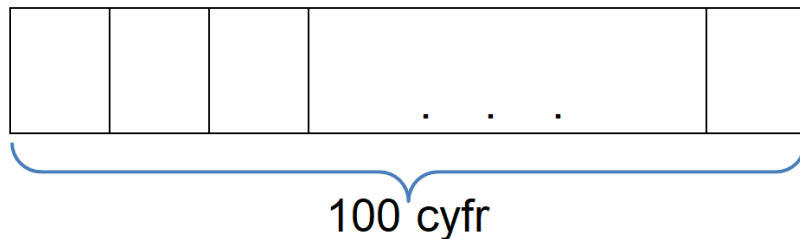
$$(0,9)^2 = 0,81$$

$$(0,9)^4 < 0,66$$

Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

★ ★ ★



Liczb bez cyfry 7 jest 9^{100} .

$$\frac{9^{100}}{10^{100}} \stackrel{?}{>} \frac{1}{2}$$

$$(0,9)^2 = 0,81$$

$$(0,9)^4 < 0,66$$

$$(0,9)^8 < 0,44$$

$$(0,9)^{16} < 0,2$$

$$(0,9)^{32} < 0,04$$

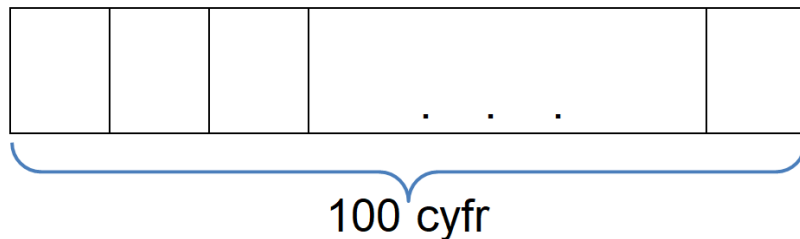
$$(0,9)^{64} < 0,0016$$

$$(0,9)^{100} < 0,00005$$

Liczby bez 7

Wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{100}$ jest oczywiście o wiele więcej takich, które nie mają w zapisie dziesiętnym cyfry 7 niż takich z 7.

★ ★ ★



Liczb bez cyfry 7 jest 9^{100} .

$$\frac{9^{100}}{10^{100}} \stackrel{?}{>} \frac{1}{2}$$

$$(0,9)^2 = 0,81$$

$$(0,9)^4 < 0,66$$

$$(0,9)^8 < 0,44$$

$$(0,9)^{16} < 0,2$$

$$(0,9)^{32} < 0,04$$

$$(0,9)^{64} < 0,0016$$

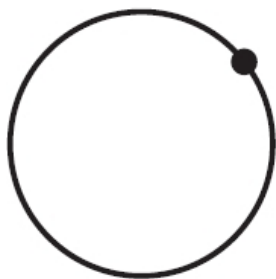
$$(0,9)^{100} < 0,00005$$

Liczb bez cyfry 7 jest
bardzo, bardzo niewiele
w porównaniu z liczbami z cyfrą 7.

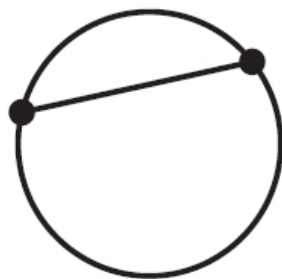
Podaj następny wyraz ciągu

Na okręgu narysowano pewną liczbę punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi.

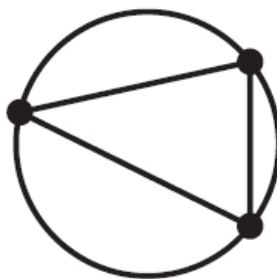
Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na jakie mogą one dzielić koło?



1



2



4



8



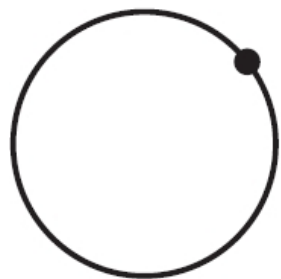
16

★ ★ ★

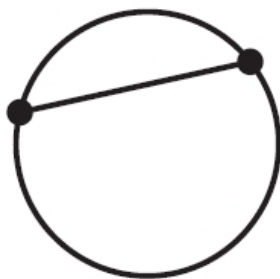
Podaj następny wyraz ciągu

Na okręgu narysowano pewną liczbę punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi.

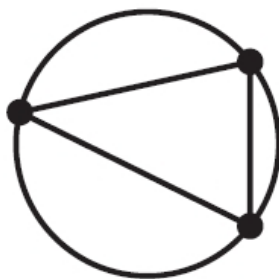
Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na jakie mogą one dzielić koło?



1



2



4

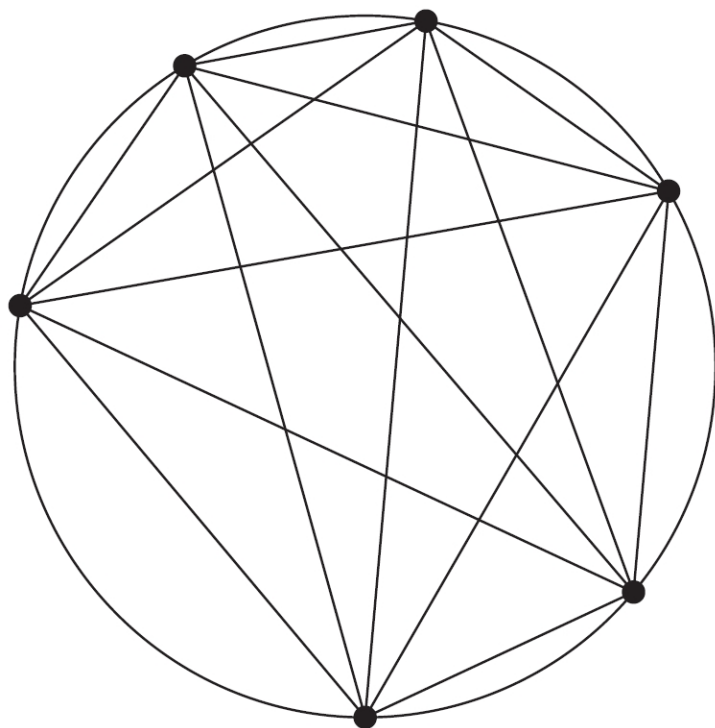


8



16

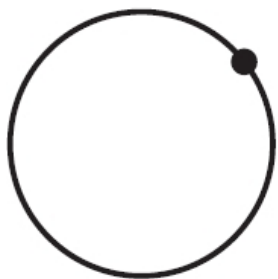
★ ★ ★



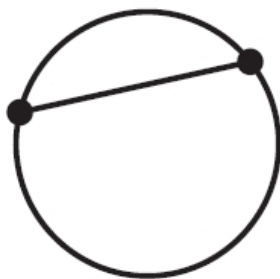
Podaj następny wyraz ciągu

Na okręgu narysowano pewną liczbę punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi.

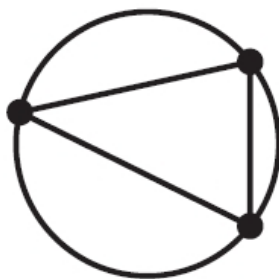
Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na jakie mogą one dzielić koło?



1



2



4

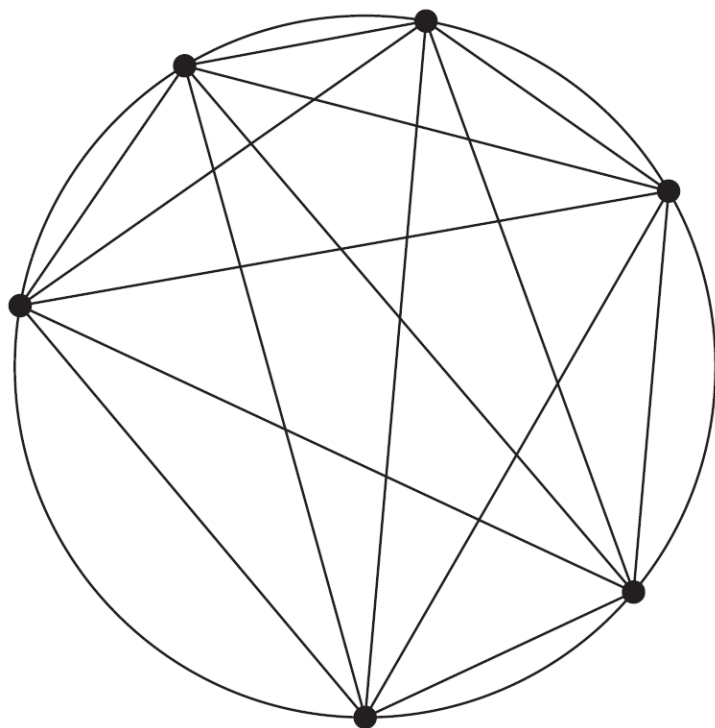


8



16

★ ★ ★

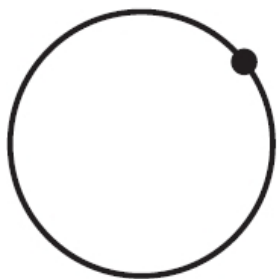


Dla 6 punktów jest najwyżej 31 obszarów.

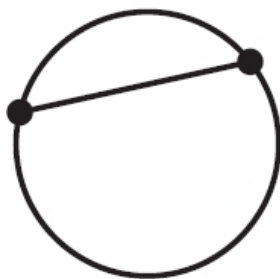
Podaj następny wyraz ciągu

Na okręgu narysowano pewną liczbę punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi.

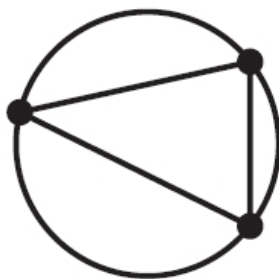
Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na jakie mogą one dzielić koło?



1



2



4

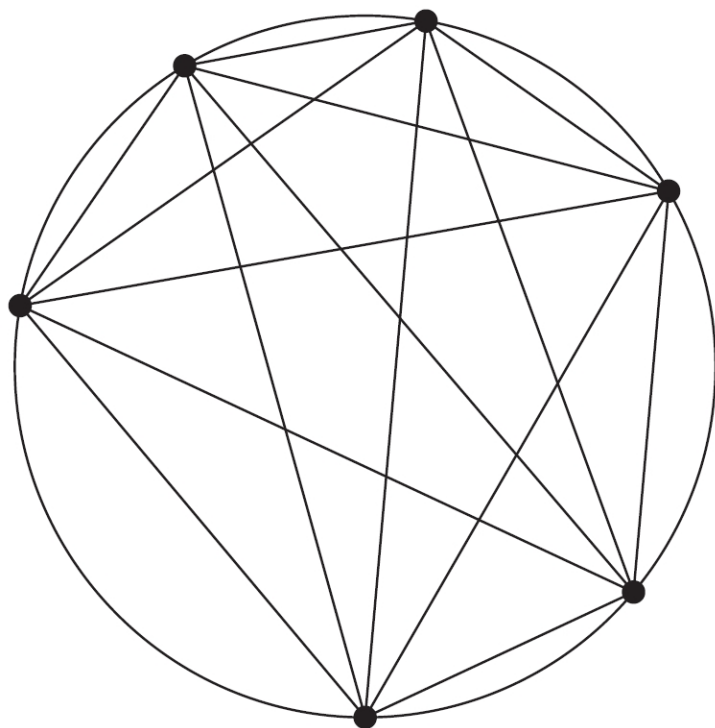


8



16

★ ★ ★



Dla 6 punktów jest najwyżej 31 obszarów.

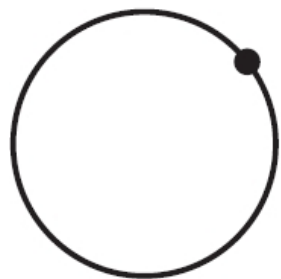
Poprawny wzór na maksymalną liczbę obszarów:

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

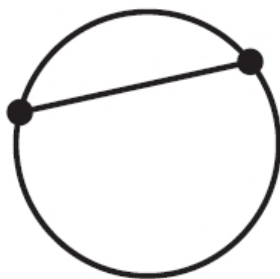
Podaj następny wyraz ciągu

Na okręgu narysowano pewną liczbę punktów i wszystkie odcinki pomiędzy nimi.

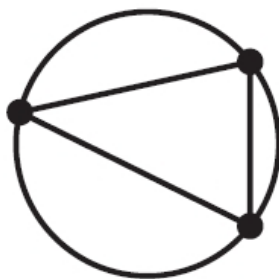
Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na jakie mogą one dzielić koło?



1



2



4

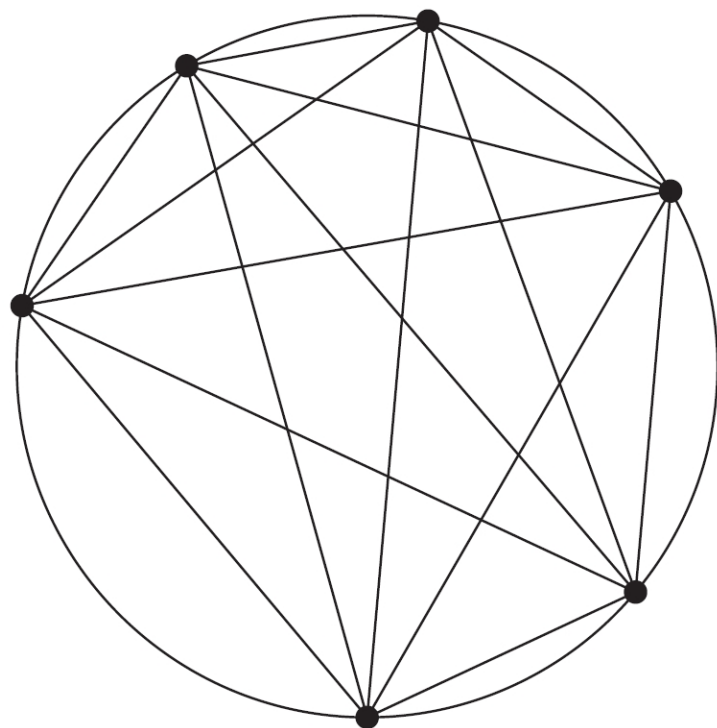


8



16

★ ★ ★



Dla 6 punktów jest najwyżej 31 obszarów.

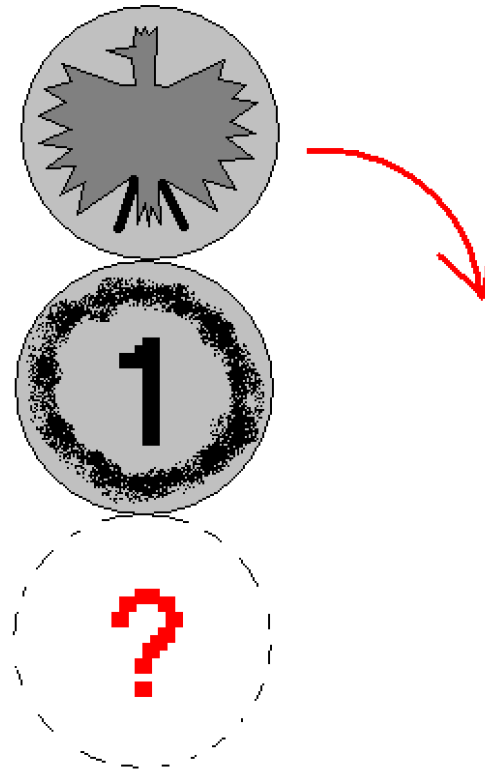
Poprawny wzór na maksymalną liczbę obszarów:

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}.$$

Dlaczego pierwsze wyrazy ciągu są potęgami 2?

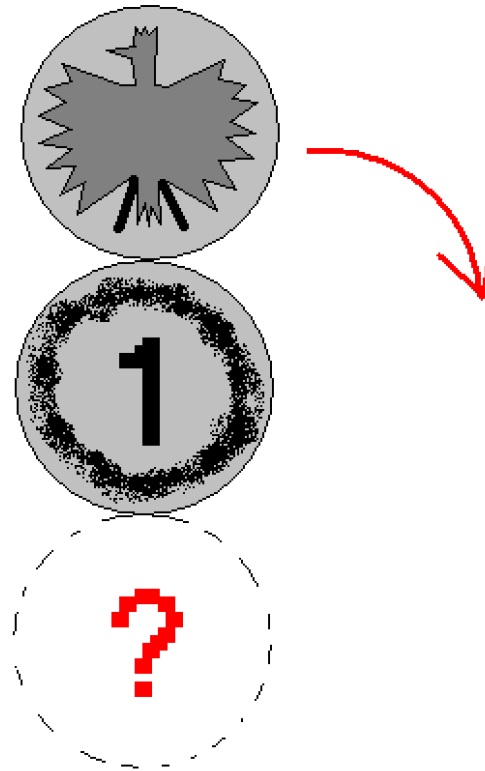
Toczenie monet

Górną złotówkę toczymy wzdłuż dolnej, nieruchomej. Kiedy toczona moneta znajdzie się na dole, orzeł będzie oczywiście do góry nogami.



Toczenie monet

Górną złotówkę toczymy wzdłuż dolnej, nieruchomej. Kiedy toczona moneta znajdzie się na dole, orzeł będzie oczywiście do góry nogami.



★ ★ ★

Warto sprawdzić samodzielnie. :)

Zagadka na koniec

Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku.
Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej,
latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić.

Zagadka na koniec

Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić.

Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich,

- pierwszej osobie pokonanie mostu zajmuje 10 minut,
- drugiej 5 minut,
- trzeciej 2 minuty,
- a czwartej 1 minutę.

W jakim najkrótszym czasie te osoby są w stanie wszystkie przedostać się przez most?

Zagadka na koniec

Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić.

Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich,

- pierwszej osobie pokonanie mostu zajmuje 10 minut,
- drugiej 5 minut,
- trzeciej 2 minuty,
- a czwartej 1 minutę.

W jakim najkrótszym czasie te osoby są w stanie wszystkie przedostać się przez most?

R. Oczywiście najszybsza osoba powinna kursować po moście, przeprowadzając kolejno pozostałych. Zajmie to $10 + 1 + 5 + 1 + 2 = 19$ minut.

Zagadka na koniec

Cztery osoby chcą przejść przez dziurawy most po ciemku. Mają do dyspozycji jedną latarkę, nikt nie może iść bez niej, latarkę z powrotem zawsze ktoś musi przenosić.

Wspólnie przez most mogą iść najwyżej dwie osoby i idą wtedy w tempie wolniejszej z nich,

- pierwszej osobie pokonanie mostu zajmuje 10 minut,
- drugiej 5 minut,
- trzeciej 2 minuty,
- a czwartej 1 minutę.

W jakim najkrótszym czasie te osoby są w stanie wszystkie przedostać się przez most?

R. Oczywiście najszybsza osoba powinna kursować po moście, przeprowadzając kolejno pozostałych. Zajmie to $10 + 1 + 5 + 1 + 2 = 19$ minut.

★ ★ ★

Da się szybciej!

