

## WOKÓŁ OKRĘGU EULERA

Fakt 1 : Odcinek łączący środki boków w trójkącie jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy

Fakt 2 : Środkowa przeciwprostokątnej jest równa jej połowie.

Fakt 3 : Odległość wierzchołka od ortocentrum jest dwa razy dłuższa od odległości środka okręgu opisanego od środka przeciwległego boku.

Fakt 4 : Trójkąt spodkowy  $H_1H_2H_3$  odcina od trójkąta wyjściowego trójkąty do niego podobne.

Fakt 5 : Na czworokącie wypukłym da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy suma kątów naprzeciwległych wynosi  $180^\circ$ .

Oznaczenia: H - ortocentrum,  $H_i$  spodki wysokości,  $M_i$  środki boków,  $E_i$  środki odcinków między ortocentrum a wierzchołkami, O środek okręgu opisanego

Zad.1. Wykaż że  $M_1M_2 = H_1M_3$ ,  $H_1M_2 = H_3M_2$ ,  $M_1H_2 + M_1H_3 = BC$ .

Zad.2. Wykaż, że  $E_1H_2 = OM_1$   $M_1E_2 = M_2E_1 = OM_3$

Zad.3. Wykaż, że  $M_1E_2 \parallel M_2E_1$   $M_2E_1 \parallel E_1E_2$

Zad.4. Wykaż, że  $\angle M_2M_1M_3 = \angle M_2H_1H_3$ ,  $\angle M_1M_3H_1 = \angle H_1M_2M_1$ .

Zad.5. Wykaż współokręgowość punktów:

$$M_1M_2M_3H_1, \quad M_1M_2M_3E_1, \quad H_1H_2H_3M_1.$$

Zad.6. Wykaż, że  $CH_2H_3B$  są współokręgowe.

Zad.7. Wykaż, że  $BH \cdot HH_2 = CH \cdot HH_3$ .

Zad.8. Wykaż, że  $\angle AH_2H_3 = \angle ABC$ .

Zad.9. Wykaż, że  $OA \perp H_2H_3$ .

Zad.10. Wykaż, że  $P_{ABC} = R \cdot p_H$ , gdzie  $p_H$  - połowa obwodu trójkąta spodkowego.

Zad.11. Wykaż, że H jest symetryczne względem  $H_i$  do punktów przecięcia się wysokości z okręgiem opisanym.

Zad.12. Wykaż, że pole trójkąta  $W_1W_2W_3$  równe jest  $R \cdot \frac{p}{2}$ , gdzie  $W_i$  - punkty przecięcia się dwusiecznych z okręgiem opisanym na trójkącie ABC.