

WOKÓŁ OKRĘGU EULERA

Fakt 1 : Odcinek łączący środki boków w trójkącie jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy

Fakt 2 : Środkowa przeciwprostokątnej jest równa jej połowie.

Fakt 3 : Odległość wierzchołka od ortocentrum jest dwa razy dłuższa od odległości środka okręgu opisanego od środka przeciwległego boku.

Fakt 4 : Trójkąt spodkowy $H_1H_2H_3$ odcina od trójkąta wyjściowego trójkąty do niego podobne.

Fakt 5 : Na czworokącie wypukłym da się opisać okrąg wtedy i tylko wtedy gdy suma kątów naprzeciwległych wynosi 180° .

Oznaczenia: H - ortocentrum, H_i spodki wysokości, M_i środki boków, E_i środki odcinków między ortocentrum a wierzchołkami, O środek okręgu opisanego

Zad.1. Wykaż że $M_1M_2 = H_1M_3$, $H_1M_2 = H_3M_2$, $M_1H_2 + M_1H_3 = BC$.

Zad.2. Wykaż, że $E_1H_2 = OM_1$ $M_1E_2 = M_2E_1 = OM_3$

Zad.3. Wykaż, że $M_1E_2 \parallel M_2E_1$ $M_2E_1 \parallel E_1E_2$

Zad.4. Wykaż, że $\angle M_2M_1M_3 = \angle M_2H_1H_3$, $\angle M_1M_3H_1 = \angle H_1M_2M_1$.

Zad.5. Wykaż współokręgowość punktów:

$$M_1M_2M_3H_1, \quad M_1M_2M_3E_1, \quad H_1H_2H_3M_1.$$

Zad.6. Wykaż, że CH_2H_3B są współokręgowe.

Zad.7. Wykaż, że $BH \cdot HH_2 = CH \cdot HH_3$.

Zad.8. Wykaż, że $\angle AH_2H_3 = \angle ABC$.

Zad.9. Wykaż, że $OA \perp H_2H_3$.

Zad.10. Wykaż, że $P_{ABC} = R \cdot p_H$, gdzie p_H - połowa obwodu trójkąta spodkowego.

Zad.11. Wykaż, że H jest symetryczne względem H_i do punktów przecięcia się wysokości z okręgiem opisanym.

Zad.12. Wykaż, że pole trójkąta $W_1W_2W_3$ równe jest $R \cdot \frac{p}{2}$, gdzie W_i - punkty przecięcia się dwusiecznych z okręgiem opisanym na trójkącie ABC.