Okręgi w różnych przestrzeniach metrycznych

Metryka

<u>DEFINICJA</u>

Niech X oznacza dowolny niepusty zbiór. **Metryką** w tym zbiorze nazywa się funkcję d: $X \times X \to [0, +\infty)$, która dla dowolnych elementów x, y, z tego zbioru spełnia następujące warunki:

M1: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2: $d(x, y) = d(y, x)$

M3: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Gdy d jest metryką w zbiorze X, to para (X, d) nazywana jest **przestrzenią metryczną**.

Okrąg w przestrzeni metrycznej

<u>DEFINICJA</u>

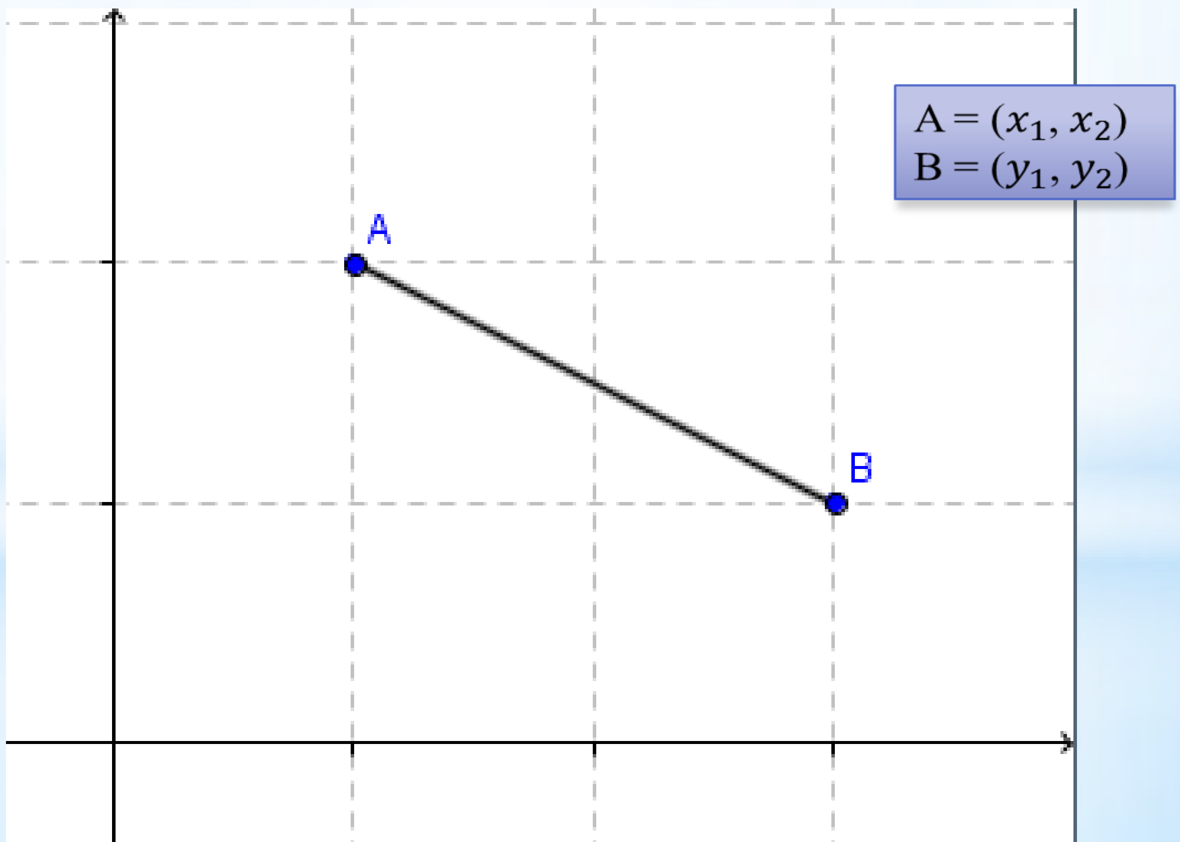
Okręgiem o środku w punkcie x i promieniu r w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy zbiór:

$$O(x, r) = \{y \in X \colon d(x, y) = r\}$$

Metryka euklidesowa

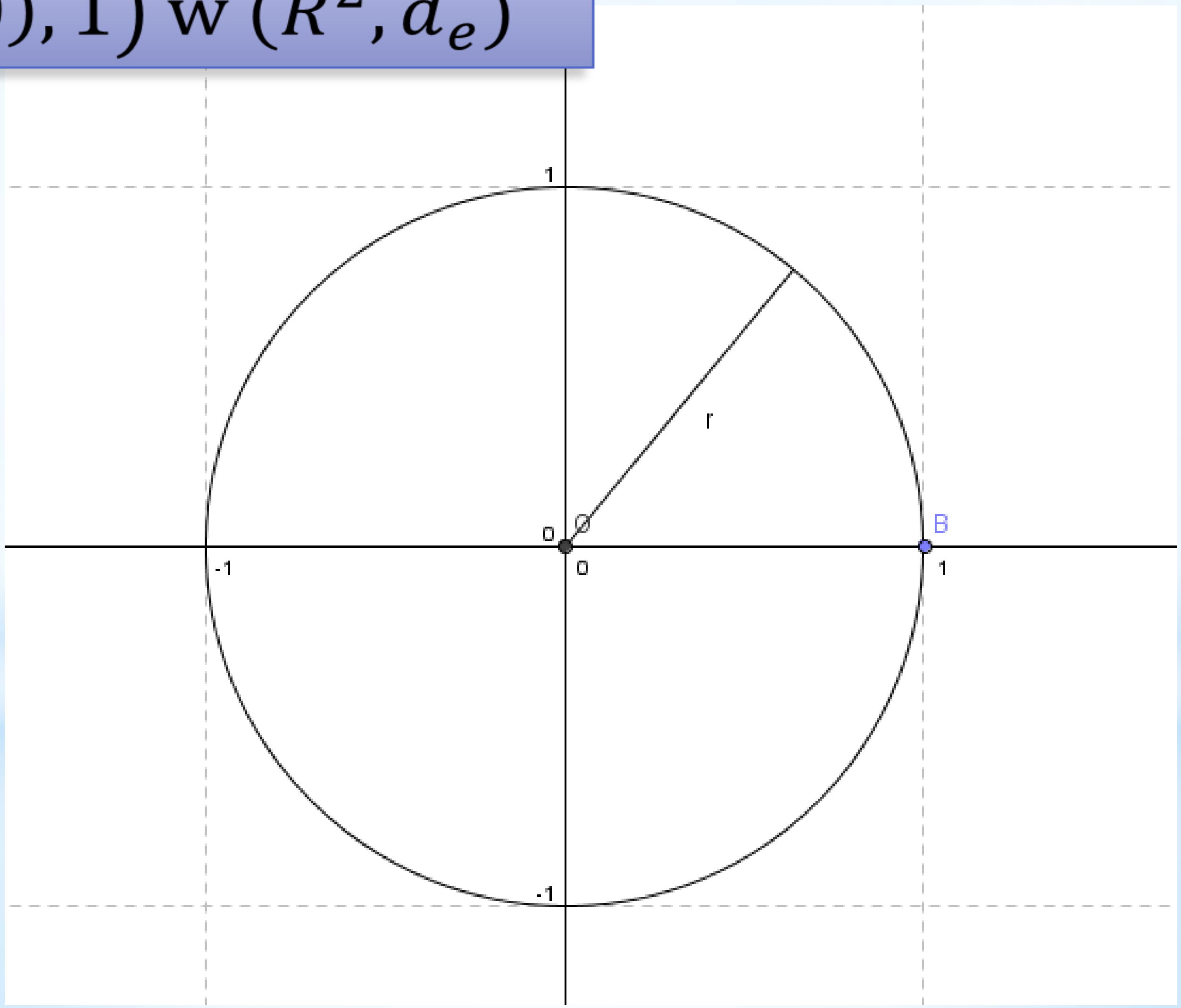
W przestrzeni R^2 metrykę euklidesową definiuje się wzorem:

$$d_e(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$



Okrąg w metryce euklidesowej

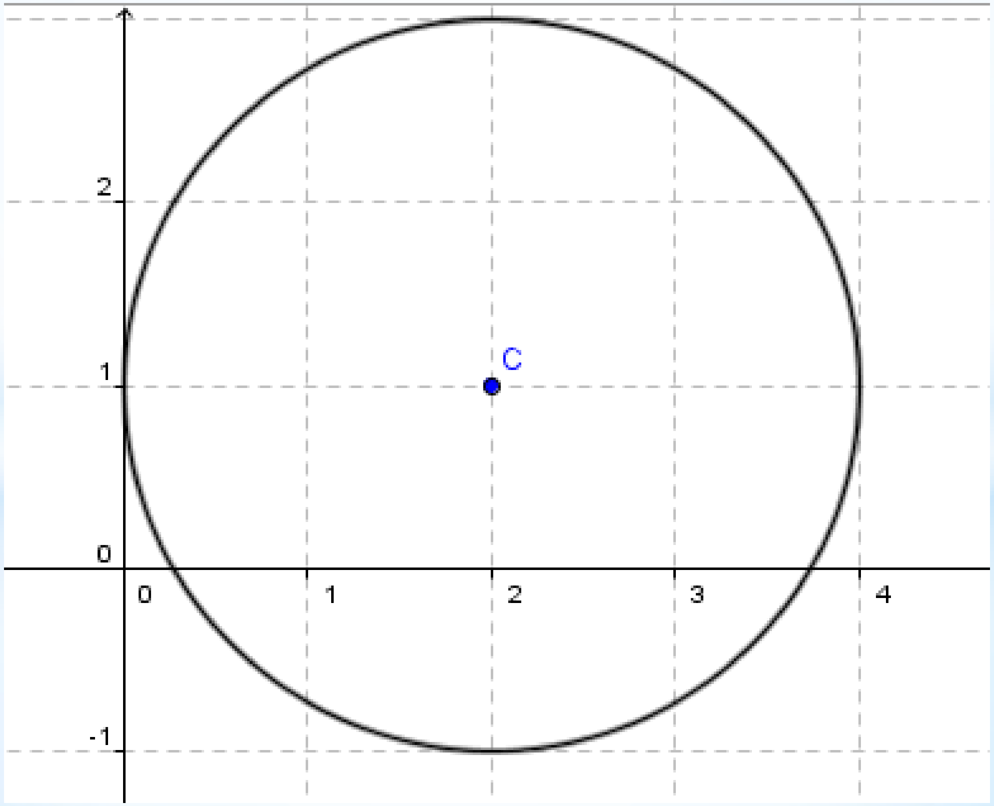
Przykład:
$O\big((0,0),1\big)$ w (R^2, d_e)



Okrąg w metryce euklidesowej

Przykład:
$O\big((2,1),2\big)$ w (R^2, d_e)

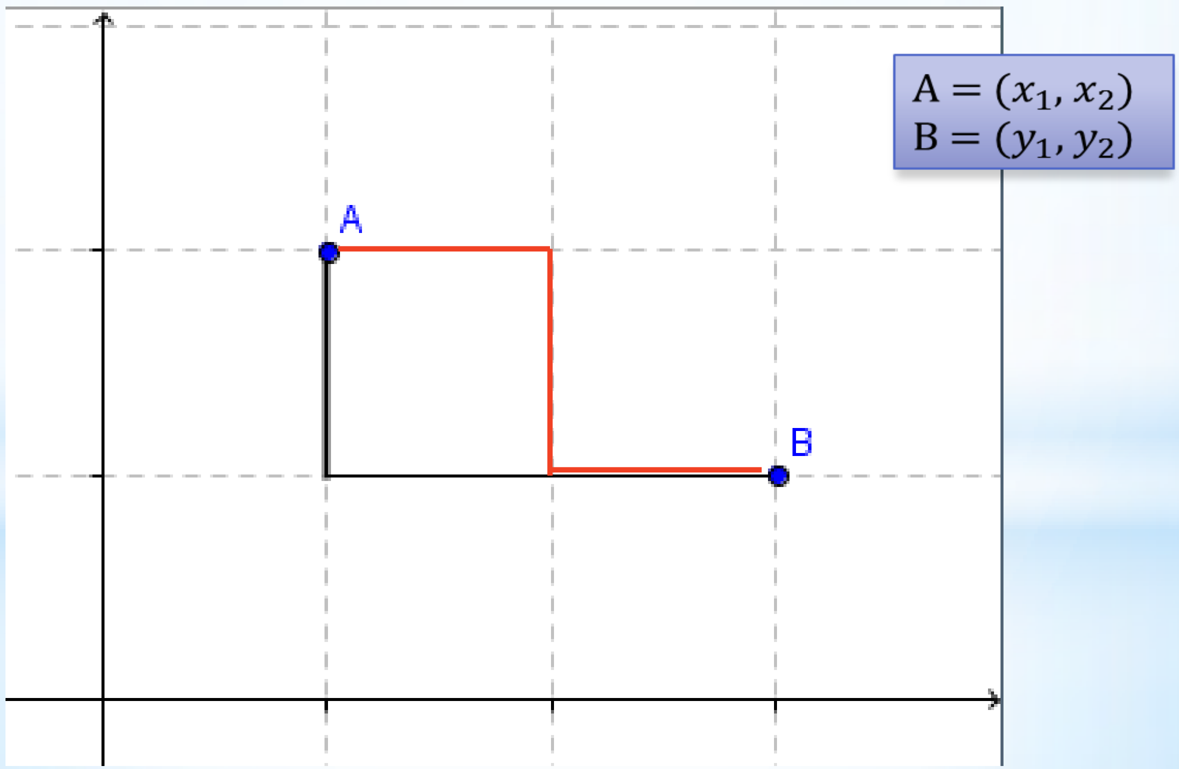
$$O((2,1),2) = \{(x,y) \in R^2 \colon \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 2\}$$



Metryka taksówkowa (miasto)

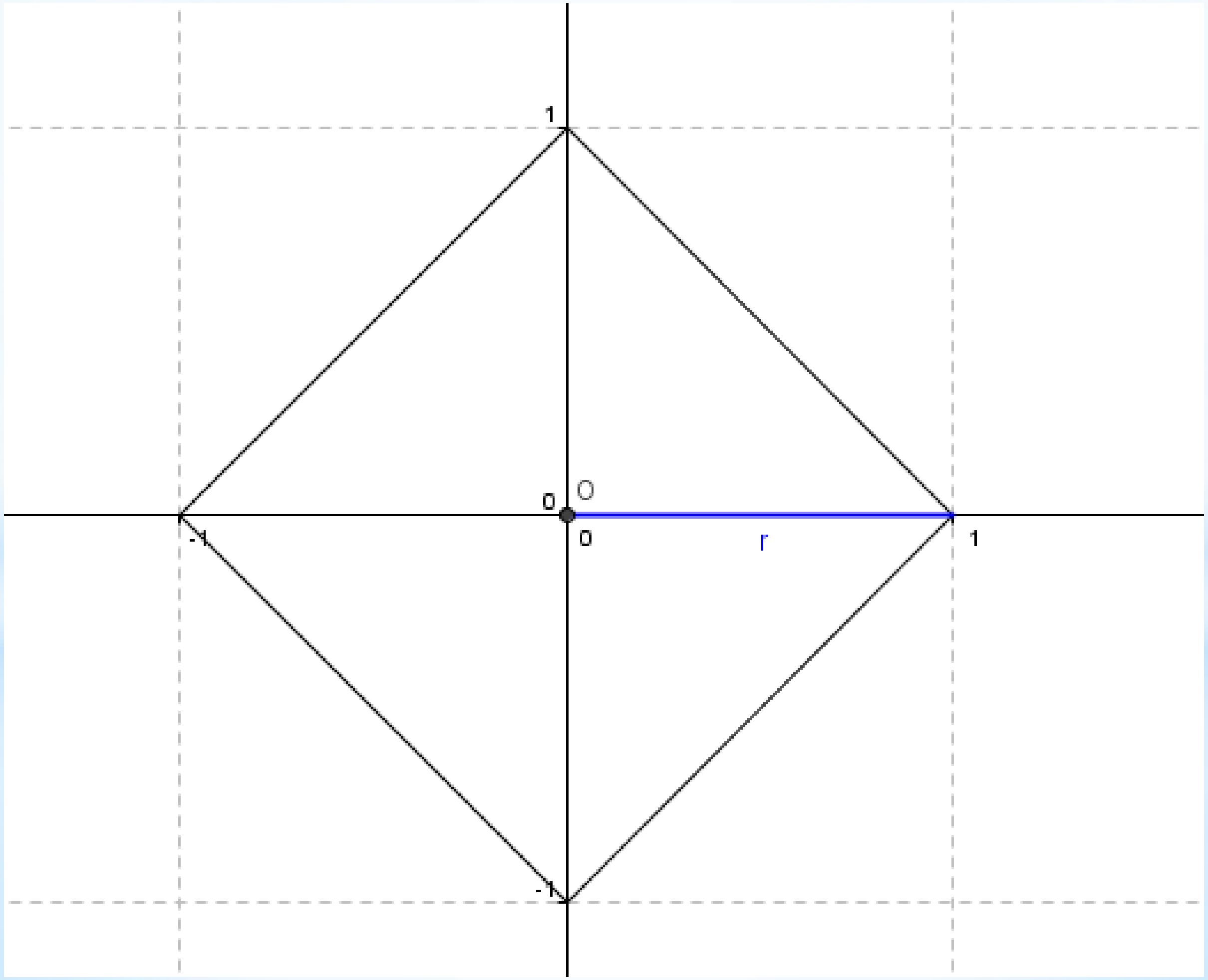
W przestrzeni R^2 metrykę taksówkową definiuje się wzorem:

$$d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$



Okrąg w metryce taksówkowej

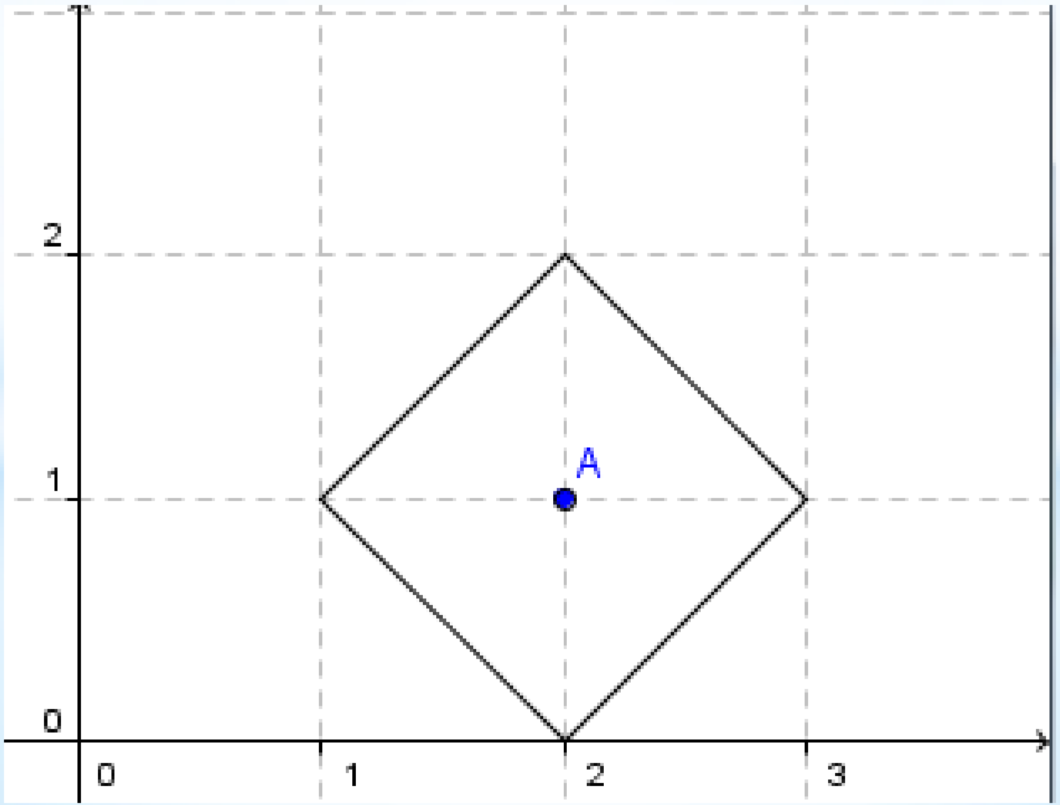
Przykład:
$O\big((0,0),1\big)$ w (R^2, d_T)



Okrąg w metryce taksówkowej

Przykład:
$O\big((2,1),1\big)$ w (R^2, d_T)

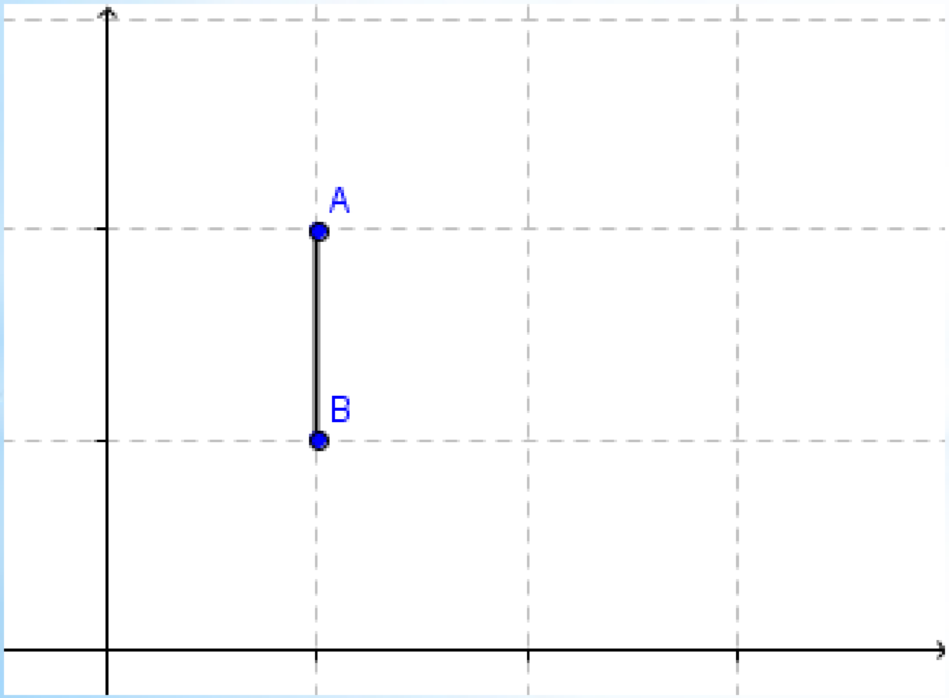
$$O((2,1),\,1) = \{(x,y) \in R^2 \colon |x-2| + |y-1| = 1\}$$

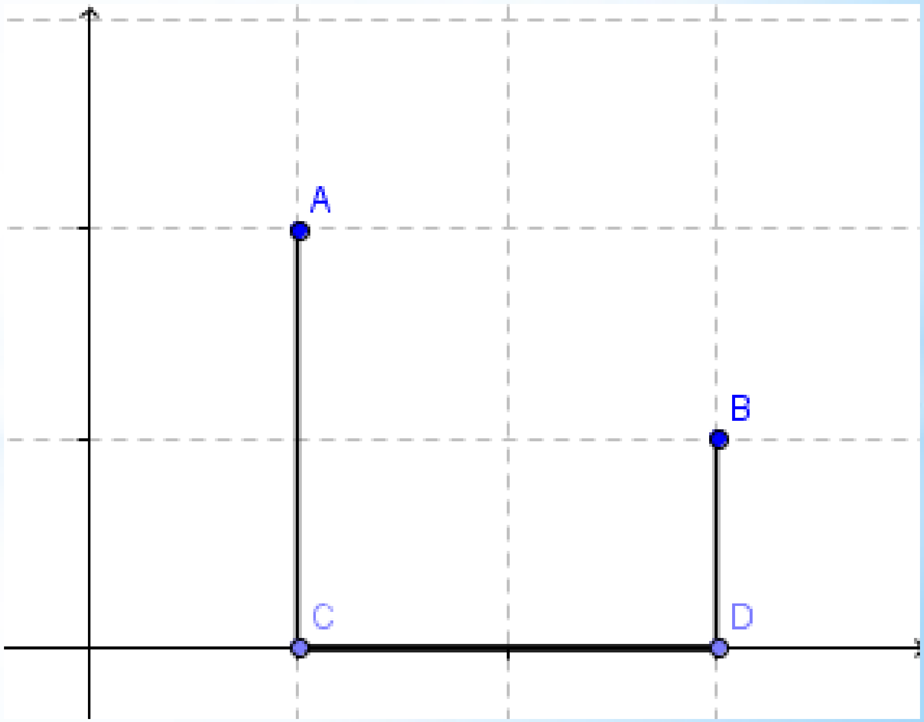


Metryka rzeka

W przestrzeni R^2 metrykę rzeka definiuje się wzorem:

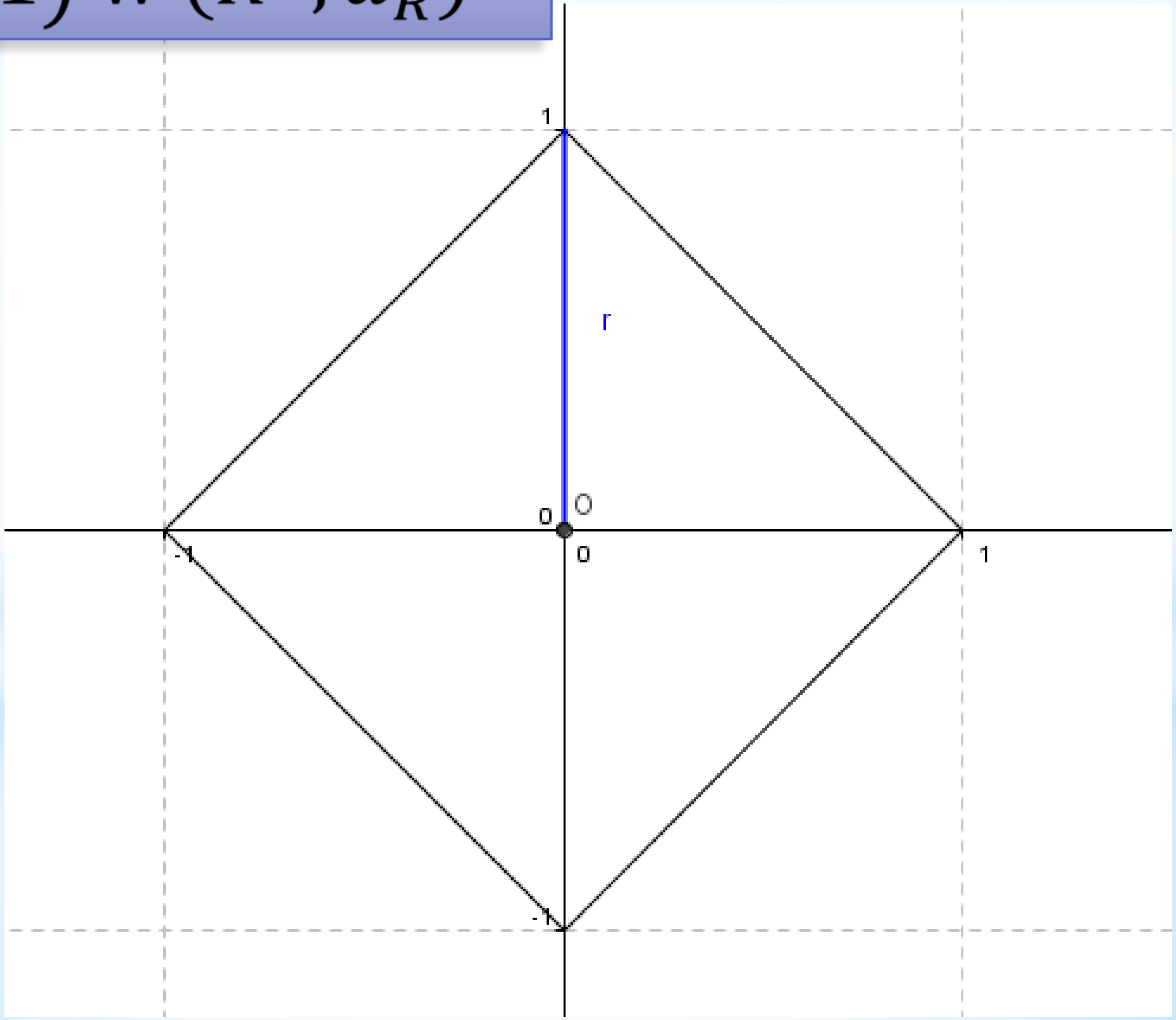
$$d_R(x, y) = \begin{cases} d_e(A,B), & \text{gdy } A \text{ i } B \text{ leżą na prostej ortogonalnej do } OX \\ d_e(A,C) + d_e(C,D) + d_e(D,B), & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$





Okrąg w metryce rzeka

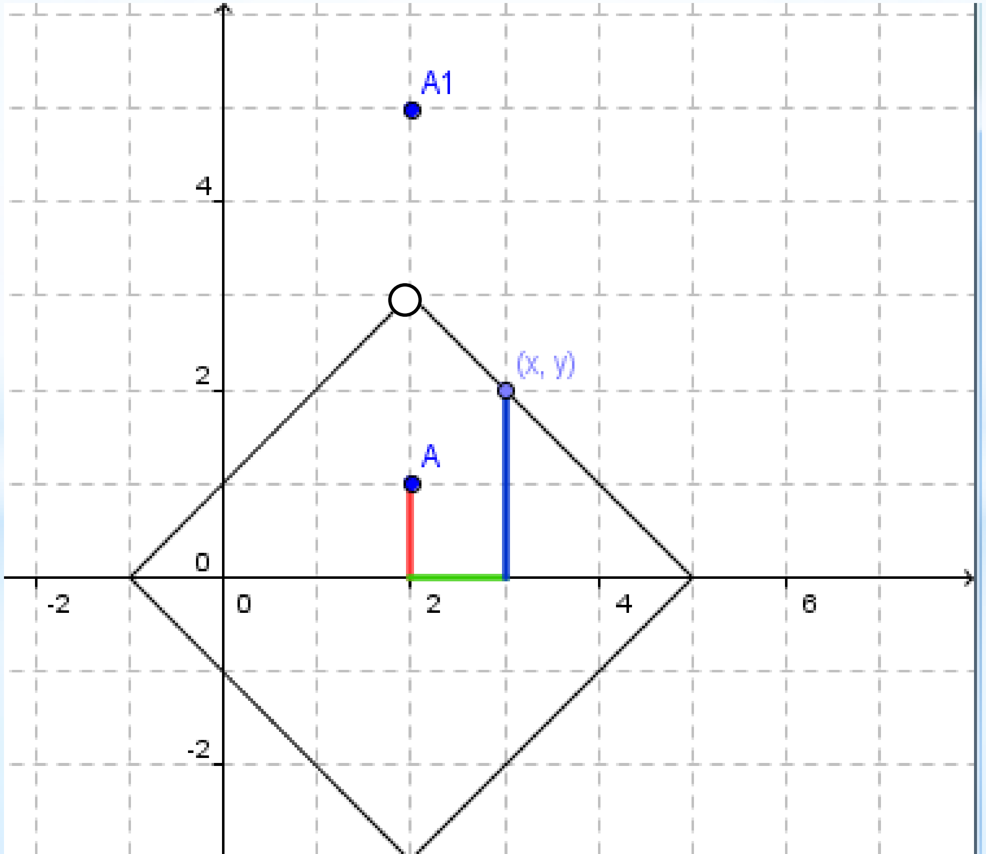
Przykład:
$O\big((0,0),1\big)$ w (R^2, d_R)



Okrąg w metryce rzeka

Przykład:
$O((2,1),4)$ w (R^2, d_R)

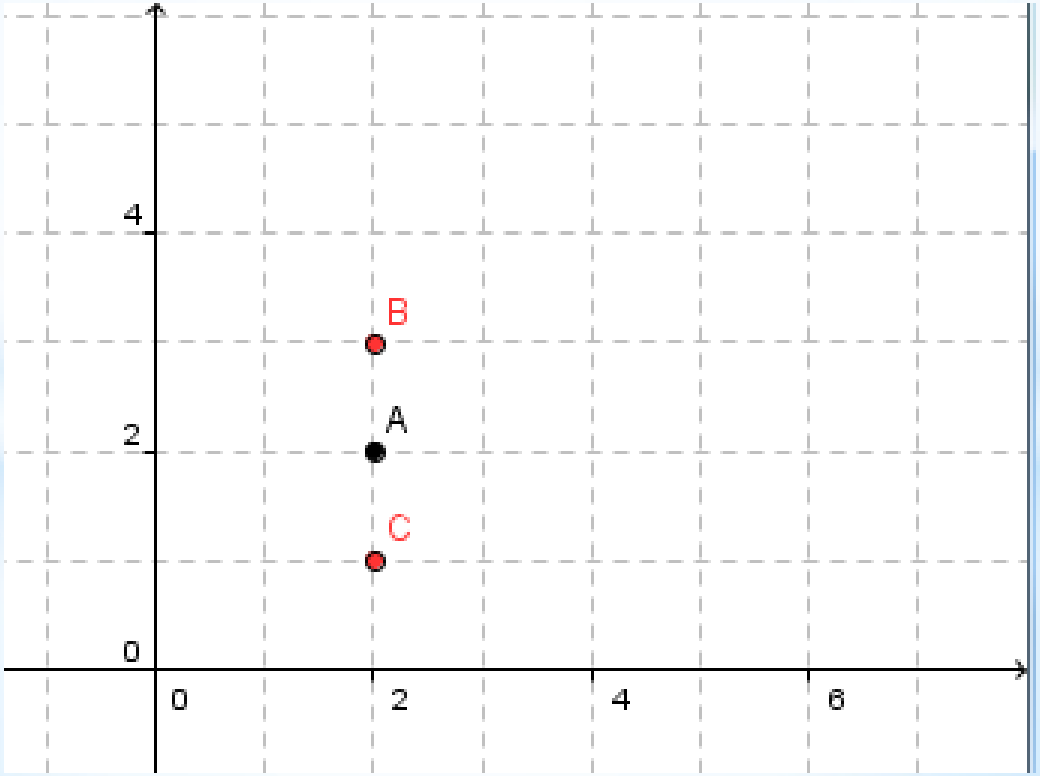
$$O((2,1),\ 4) = \{(x,y) \in R^2 \colon 1 + |x-2| + |y| = 4\}$$



Okrąg w metryce rzeka

Przykład:
$O\big((2,2),1\big)$ w (R^2, d_R)

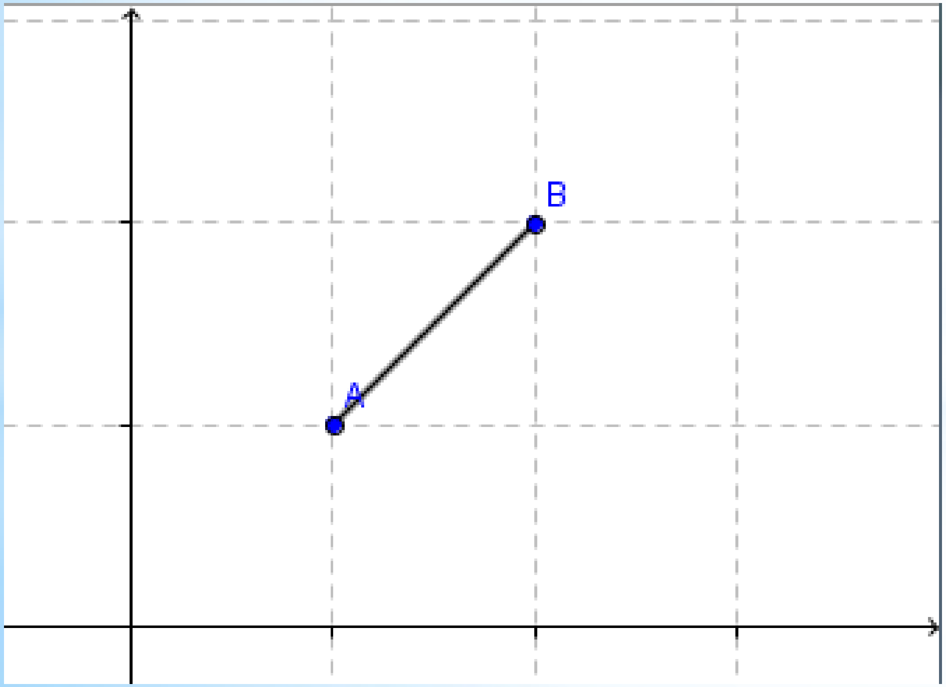
$$O\big((2,2),1\big) = \{B, C\}$$

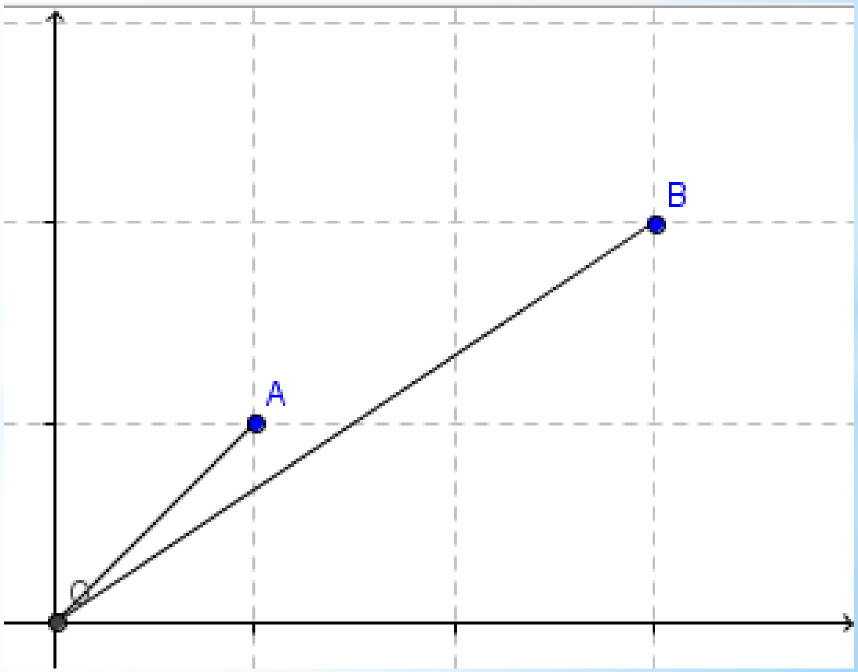


Metryka centrum (kolejowa)

W przestrzeni R^2 metrykę centrum definiuje się wzorem:

$$d_C(x, y) = \begin{cases} d_e(A,B), & \text{gdy punkty } A, B \text{ i } (0,0) \text{ są współliniowe} \\ d_e(A,0) + d_e(0,B), & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

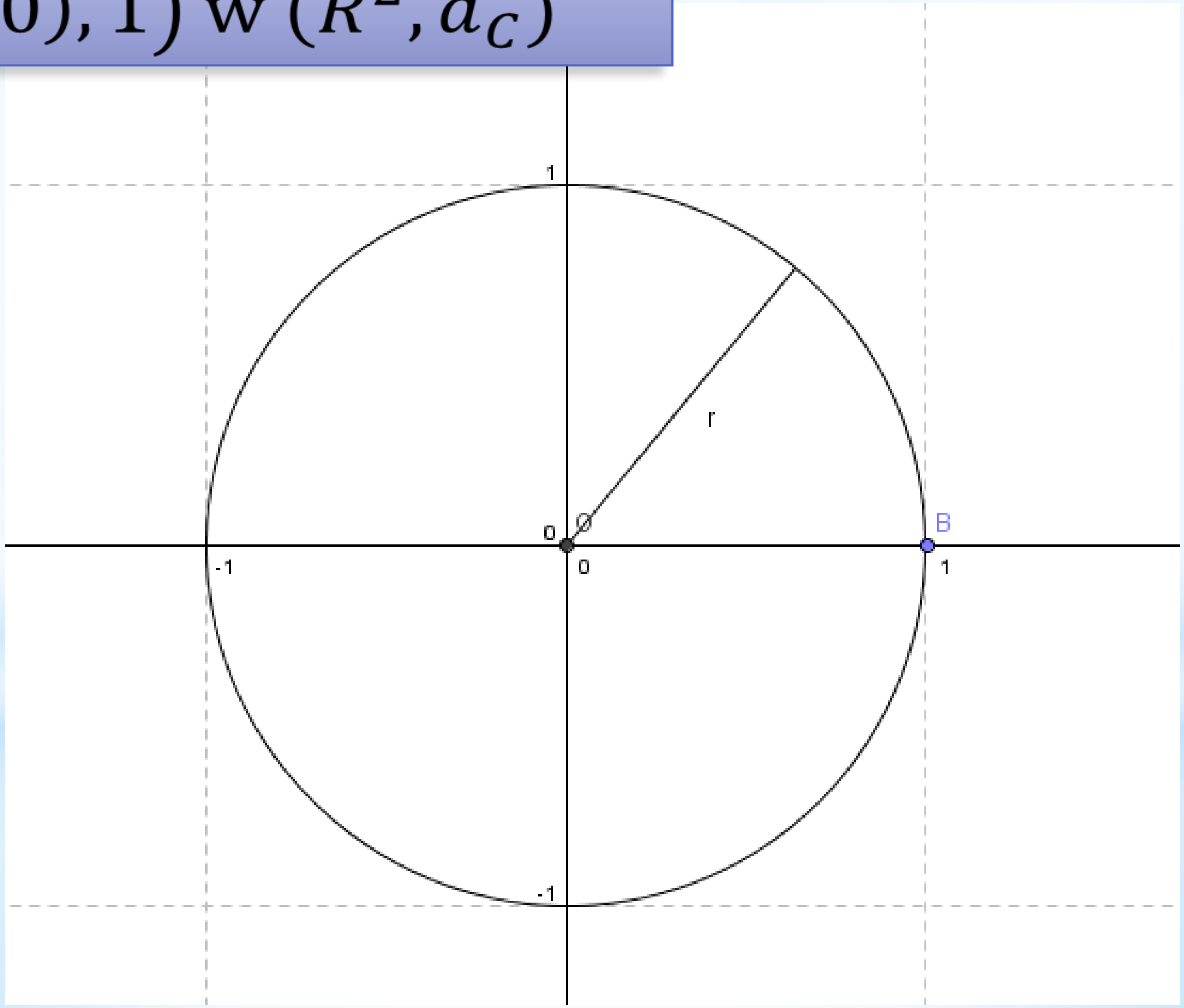




Okrąg w metryce centrum

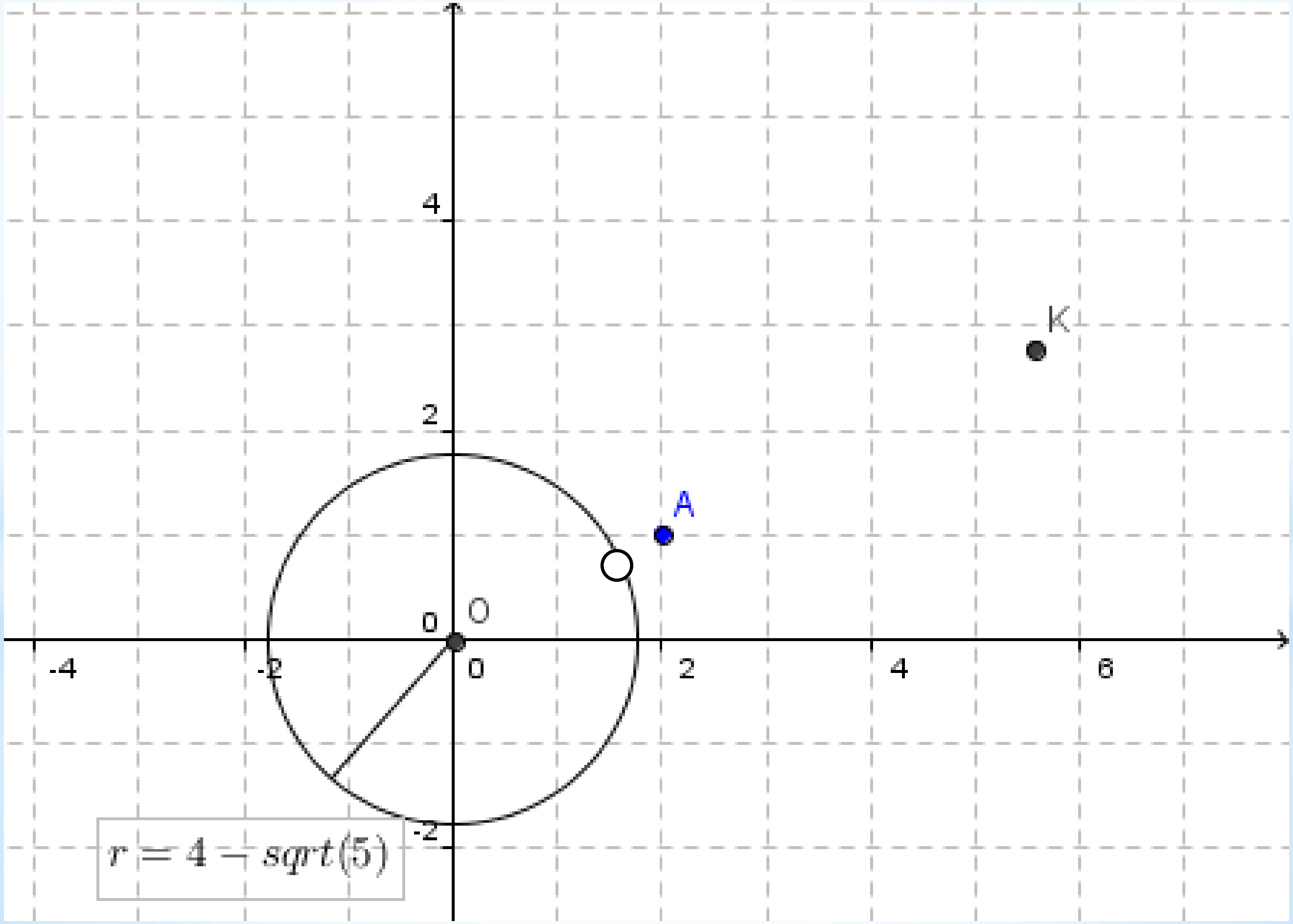
Przykład:

$O\big((0,0),1\big)$ w (R^2, d_C)



Okrąg w metryce centrum

Przykład:
$O\big((2,1),4\big)$ w (R^2, d_C)



Okrąg w metryce centrum

Przykład:

$$O\left((2,2),\ \sqrt{2}\right) \text{ w } (R^2, d_C)$$

$$O\left((2,2),1\right) = \{B, C\}$$