Uniwersytet Wrocławski

Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

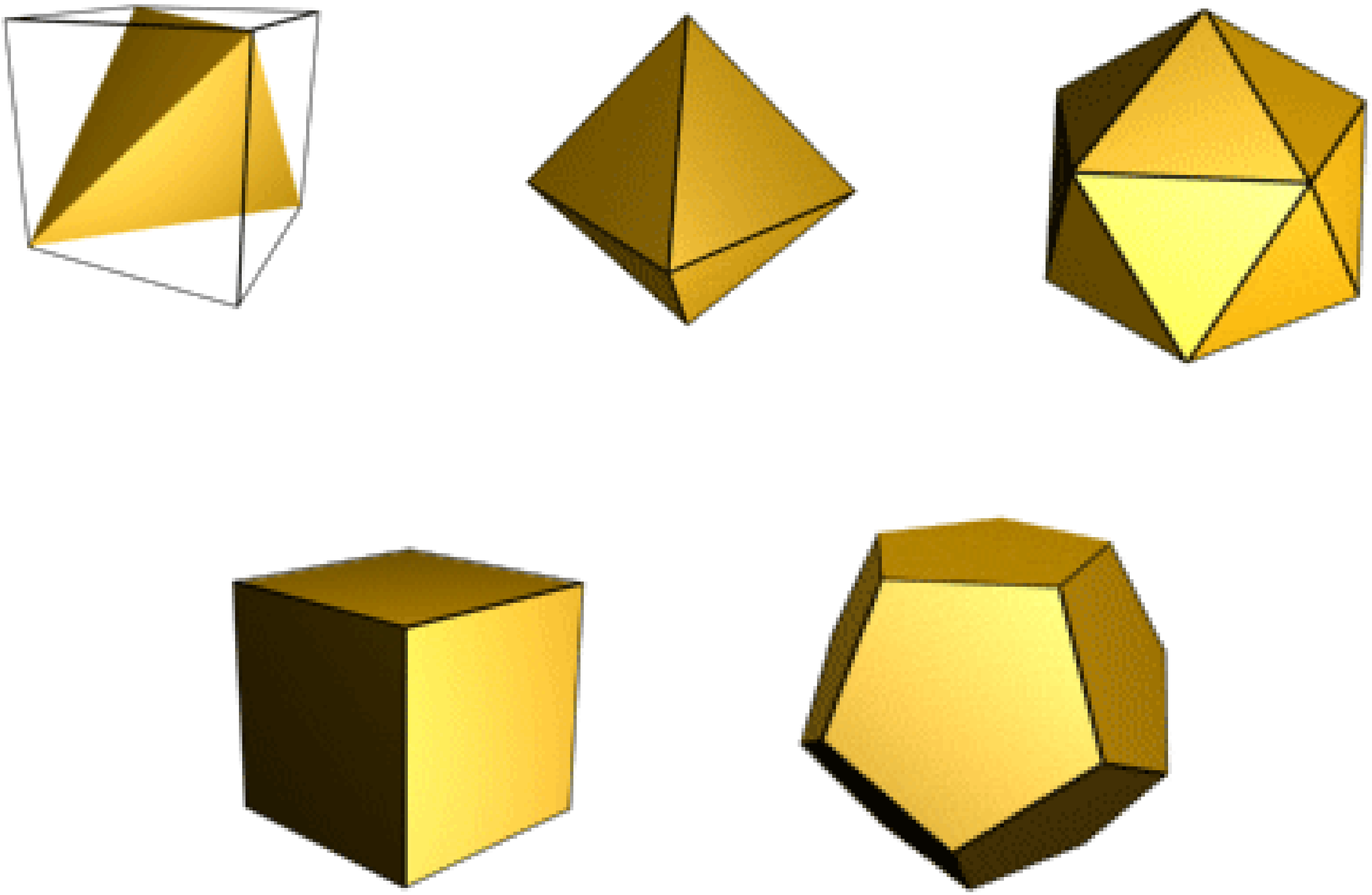
PARKIETAŻE

Patrycja Kumaszka
Anna Zwęglińska

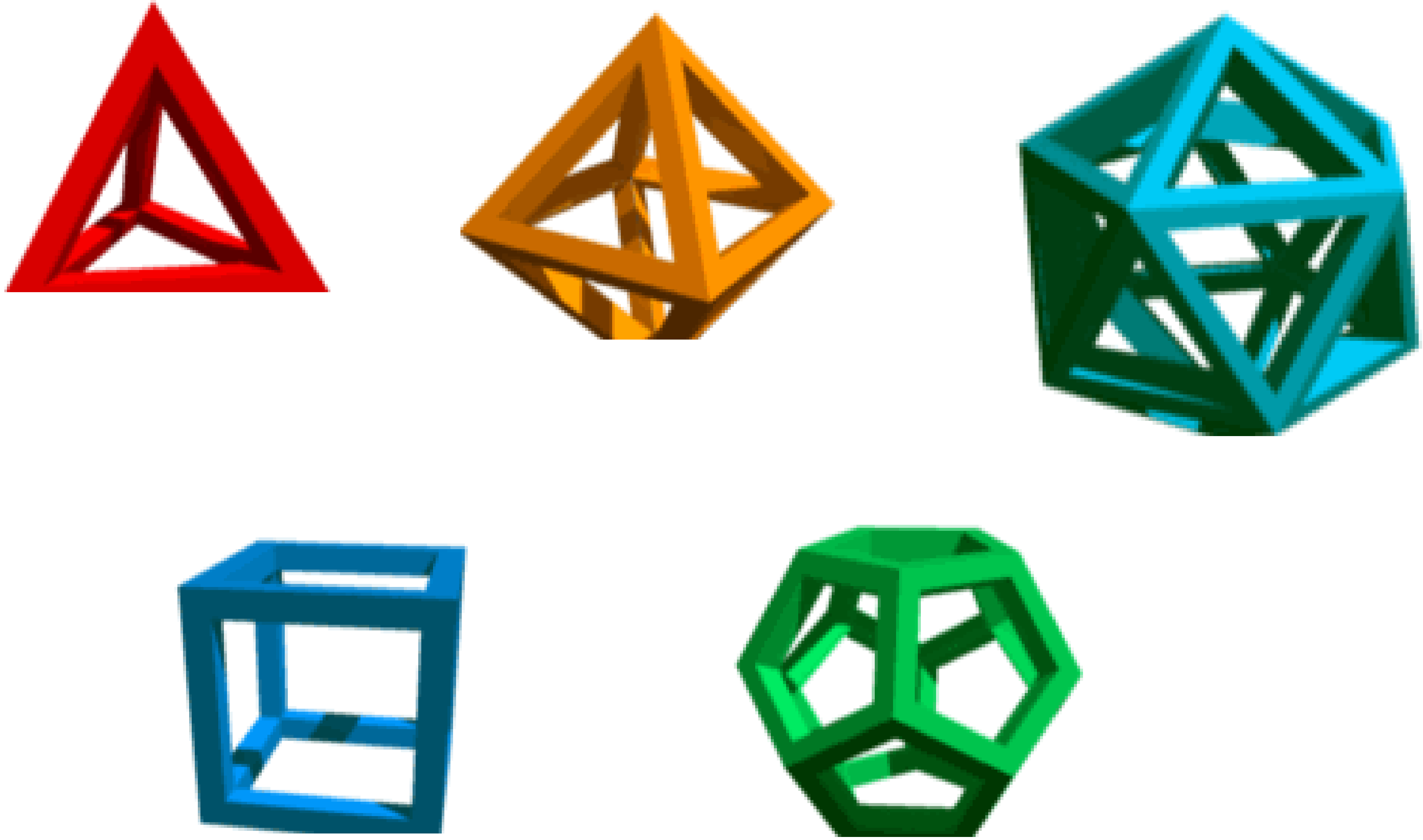
Wielościany foremne

Bryły platońskie

Bryły platońskie



Bryły platońskie

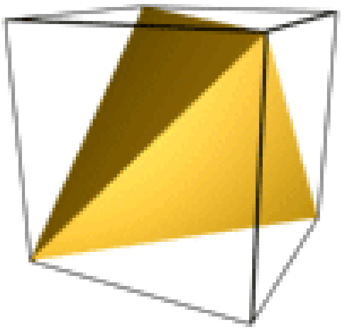


Oznaczanie/kodowanie
Symbol Schläfliego

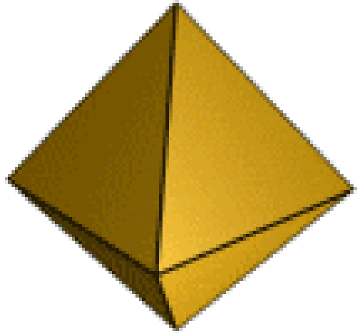
Symbolem Schläfliego **{p, q}**, gdzie:

p oznacza, że każda ściana jest wielokątem foremnym o p bokach;
q oznacza po ile ścian ma wielościan w każdy wierzchołek.

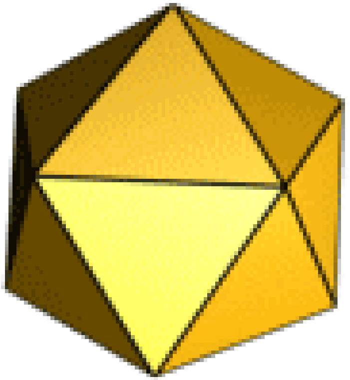
Symbol Schläfliego



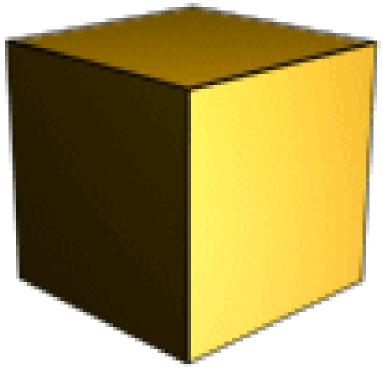
{3,3}



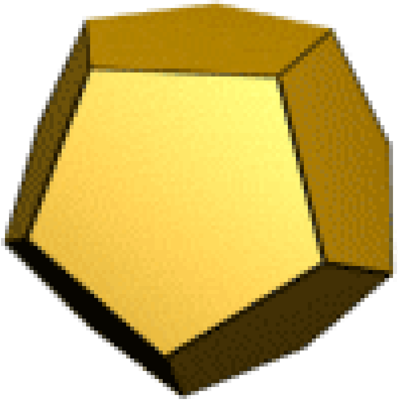
{3,4}



{3,5}



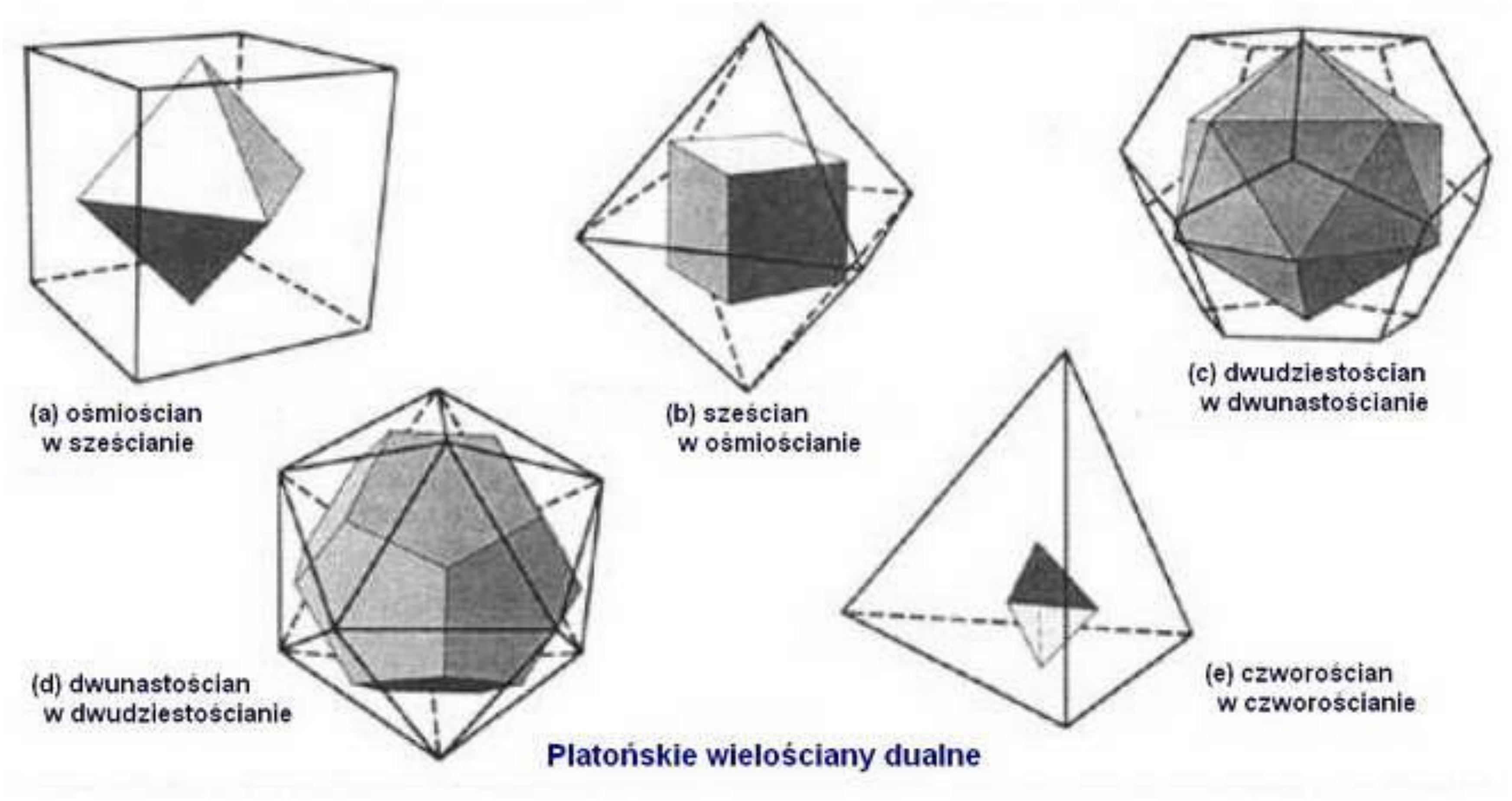
{4,3}



{5,3}

Wielościany dualne

Platońskie wielościany dualne



Co to jest parkietaż?

Parkietaże dzielimy na:

- CYKLICZNE:
  - **Foremne (platońskie)**
  - **Półforemne**:
    - Regularne (archimedesowe)
    - nieregularne
  - **Foremnościenne** (np. Johnsona)
  - **Nieforemne**
    - Prawidłowe
    - Nieprawidłowe

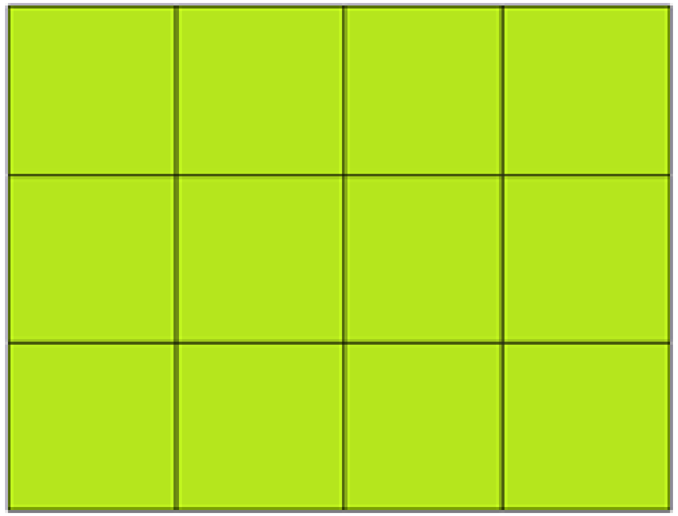
- ACYKLICZNE:

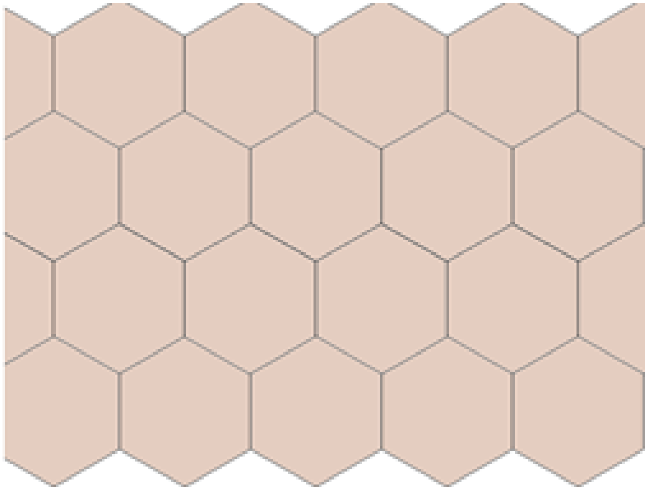
  (np. Penrose'a, Pearsona)

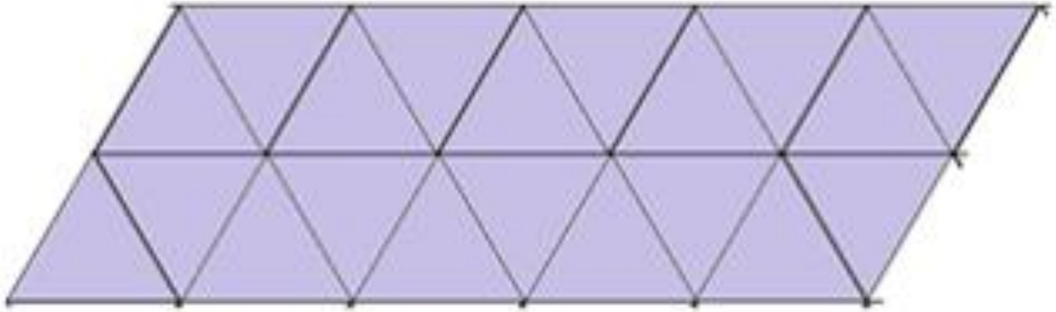
PARKIETAŻ PLATOŃSKI

Pitagoras jako pierwszy wykazał, że istnieją tylko trzy takie parkietaże.

Parkietaże foremne







Miara kąta wewnętrznego wielokąta o *p* kątach wynosi:

$$\frac{(\boldsymbol{p} - \mathbf{2}) * \mathbf{180^\circ}}{\boldsymbol{p}}$$

Trójkąt równoboczny:

$360°: 60°=6$

Trójkąt równoboczny:
360°: 60°=6

Kwadrat:
360°: 90°= 4

Trójkąt równoboczny:
360°: 60°=6

Kwadrat:
360°: 90°= 4

Pięciokąt foremny:
360°: 108°=3,33

Trójkąt równoboczny:
360°: 60°=6

Kwadrat:
360°: 90°= 4

Pięciokąt foremny:
360°: 108°=3,33…

Sześciokąt foremny:
360°:120°=3

Trójkąt równoboczny:
360°: 60°=6

Kwadrat:
360°: 90°= 4

Pięciokąt foremny:
360°: 108°=3,33…

Sześciokąt foremny:
360°:120°=3

Trójkąt równoboczny:
360°: 60°=6

Kwadrat:
360°: 90°= 4

Pięciokąt foremny:
360°: 108°=3,33…

Sześciokąt foremny:
360°:120°=3

Siedmiokąt foremny:
360°:128,57°≈ 2,8

Trójkąt równoboczny:
360°: 60°=6

Kwadrat:
360°: 90°= 4

Pięciokąt foremny:
360°: 108°=3,33…

Sześciokąt foremny:
360°:120°=3

Siedmiokąt foremny:
360°:128,57°≈ 2,8

Dziesięciokąt foremny:
360°:144=2,5

Inny dowód

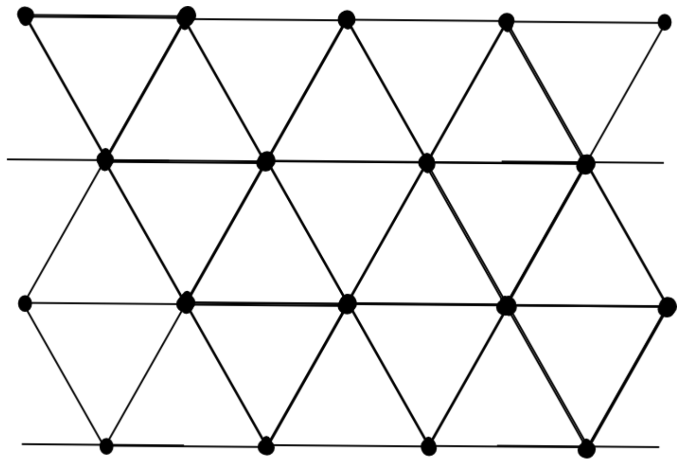
Oznaczanie
Symbol Schläfliego

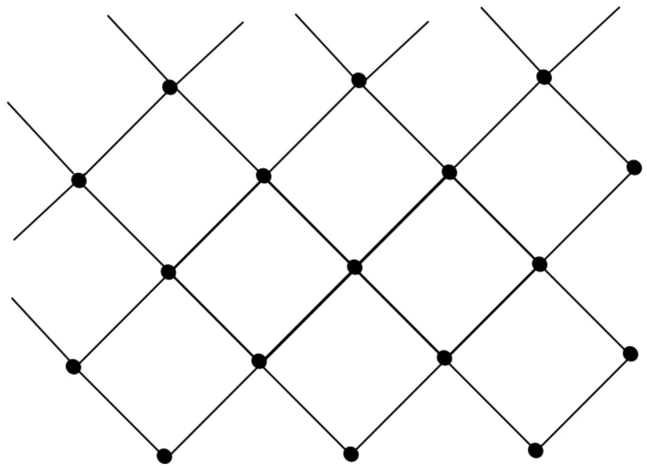
Symbol Schläfliego jednoznacznie określa foremne parkietaże.

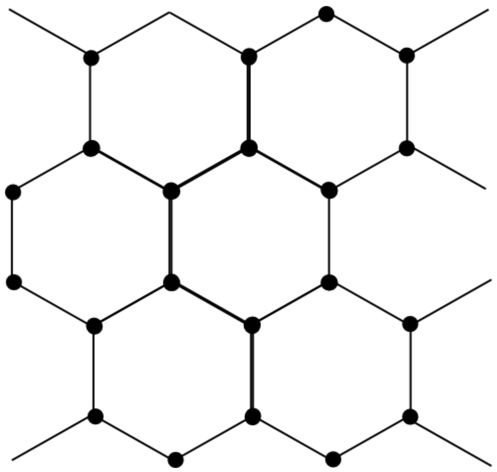
{p,q}, gdzie:

p oznacza wielokąt foremny o p bokach;
q oznacza liczbę p-kątów otaczających każdy wierzchołek.

Oznaczanie/kodowanie
Symbol Schläfliego



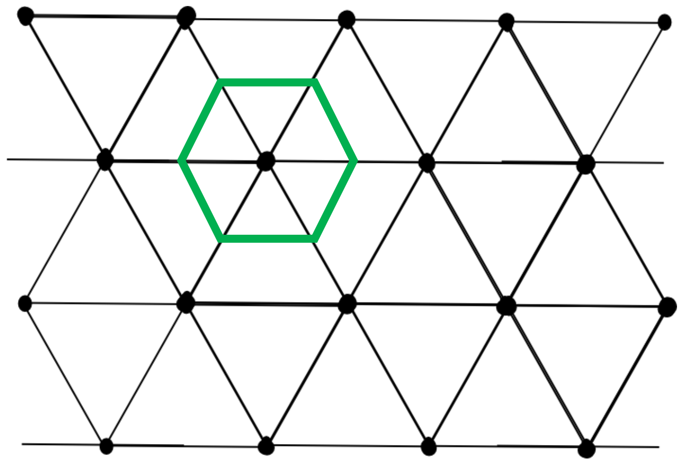




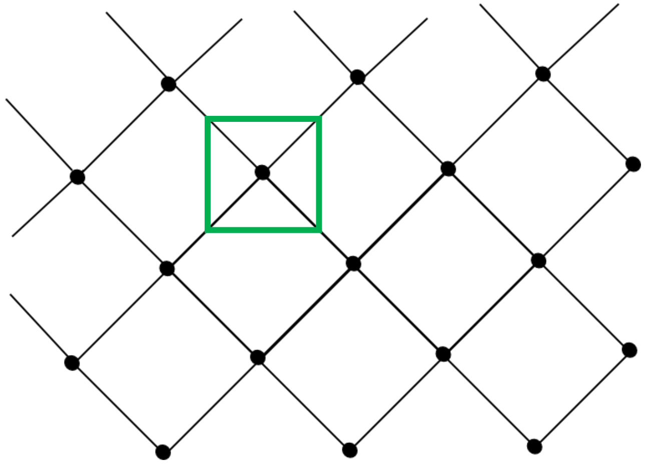
Oznaczanie/kodowanie
Symbol Schläfliego

.

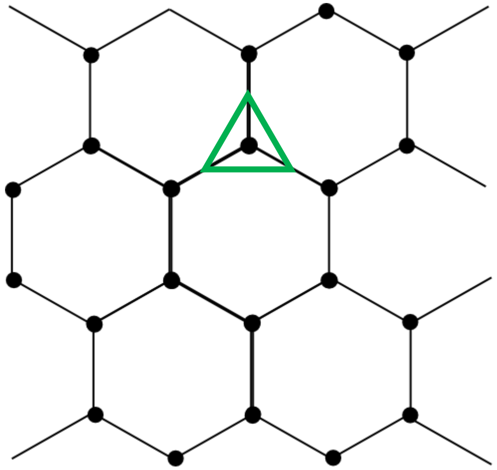
{p,q}, gdzie:
p oznacza wielokąt foremny o p bokach;
q oznacza liczbę p-kątów otaczających każdy wierzchołek.



{3,6}

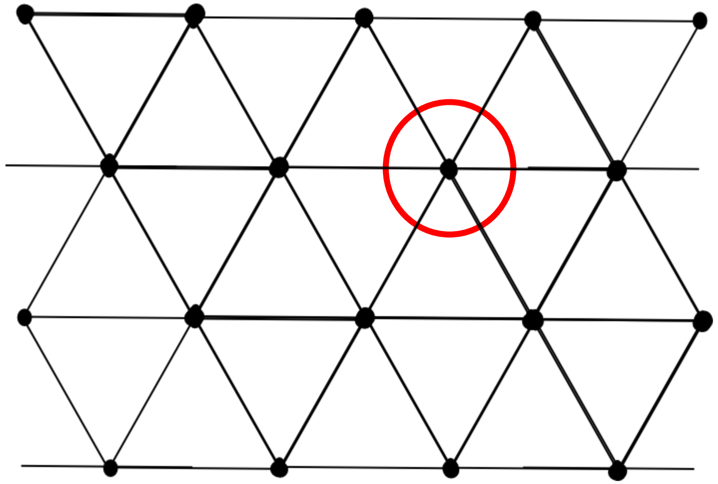


{4,4}

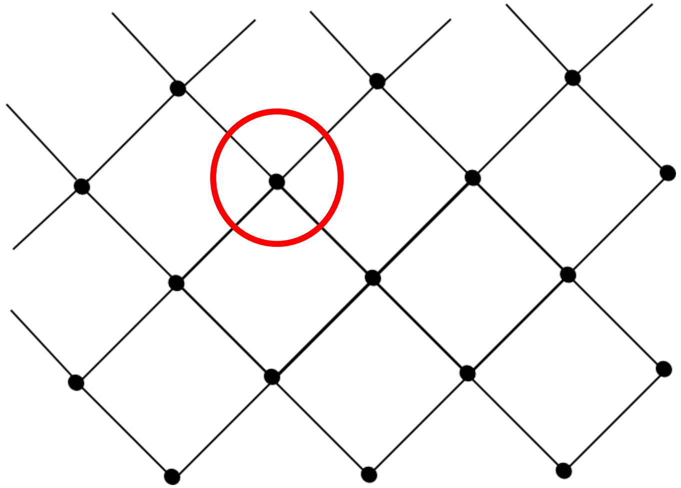


{6,3}

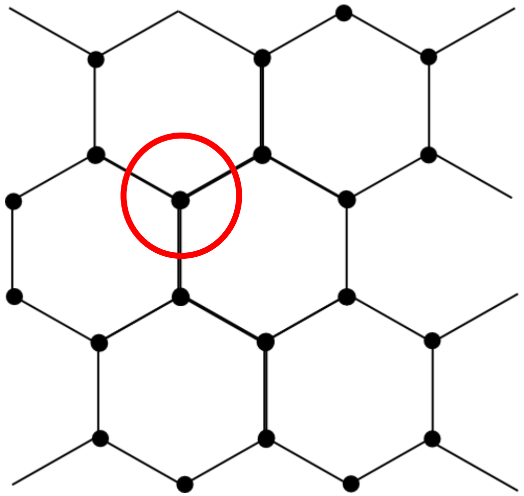
Oznaczanie/kodowanie



3-3-3-3-3-3

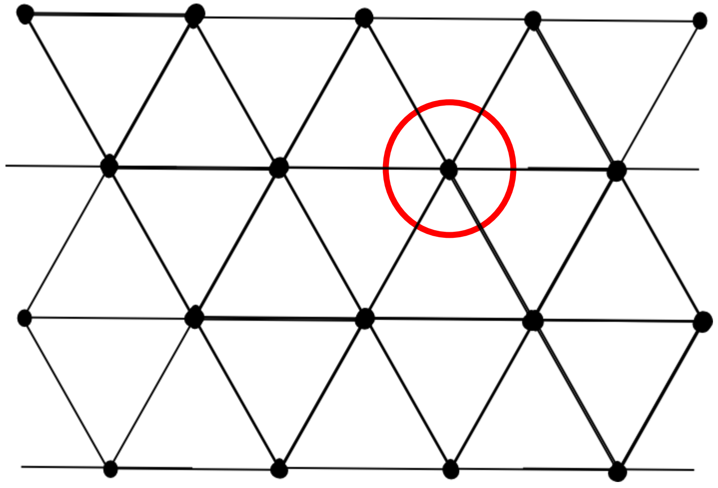


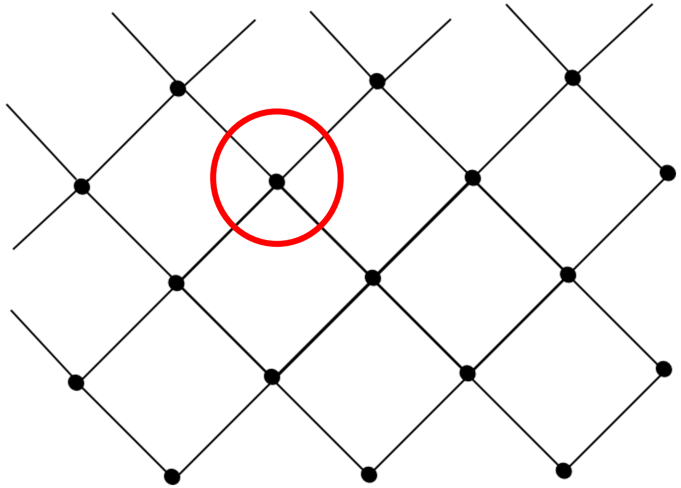
4-4-4-4

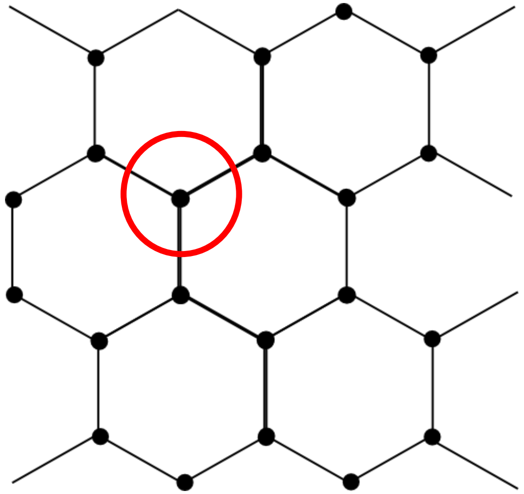


6-6-6

Oznaczanie/kodowanie







3-3-3-3-3-3

4-4-4-4

6-6-6

INNE:

[3,3,3,3,3,3]

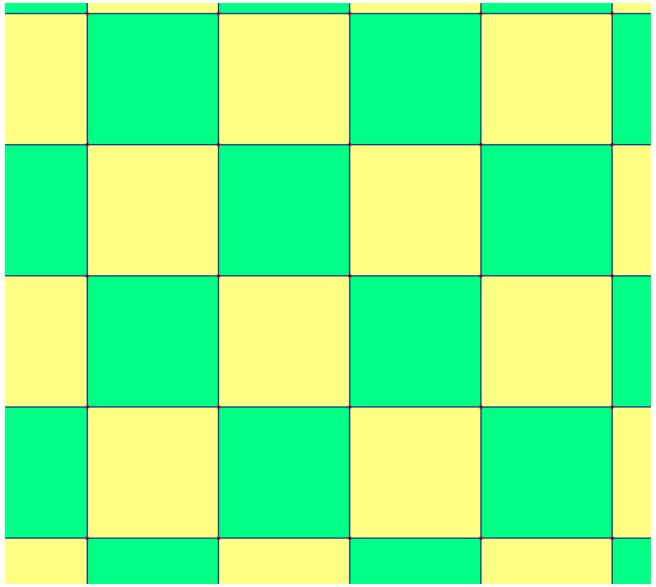
[4,4,4,4]

[6,6,6]

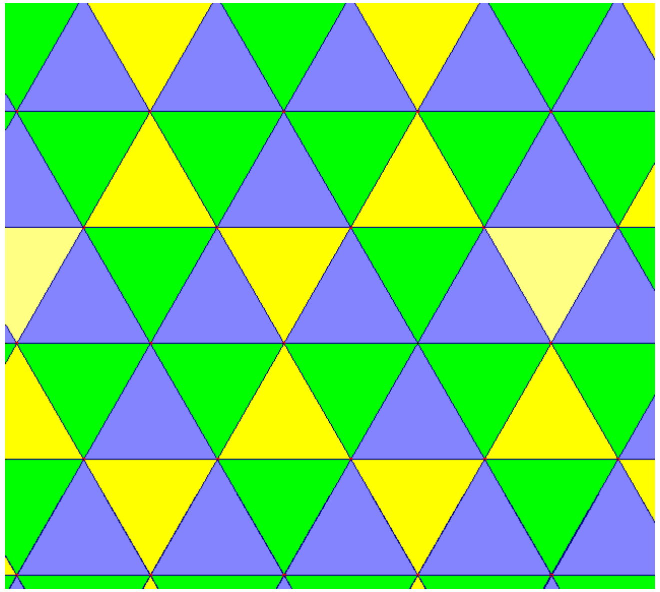
3^6

4^4

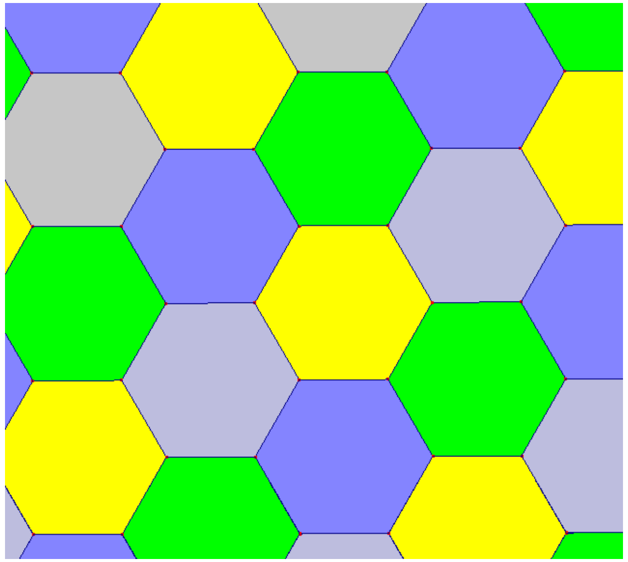
6^3



4-4-4-4



3-3-3-3-3-3

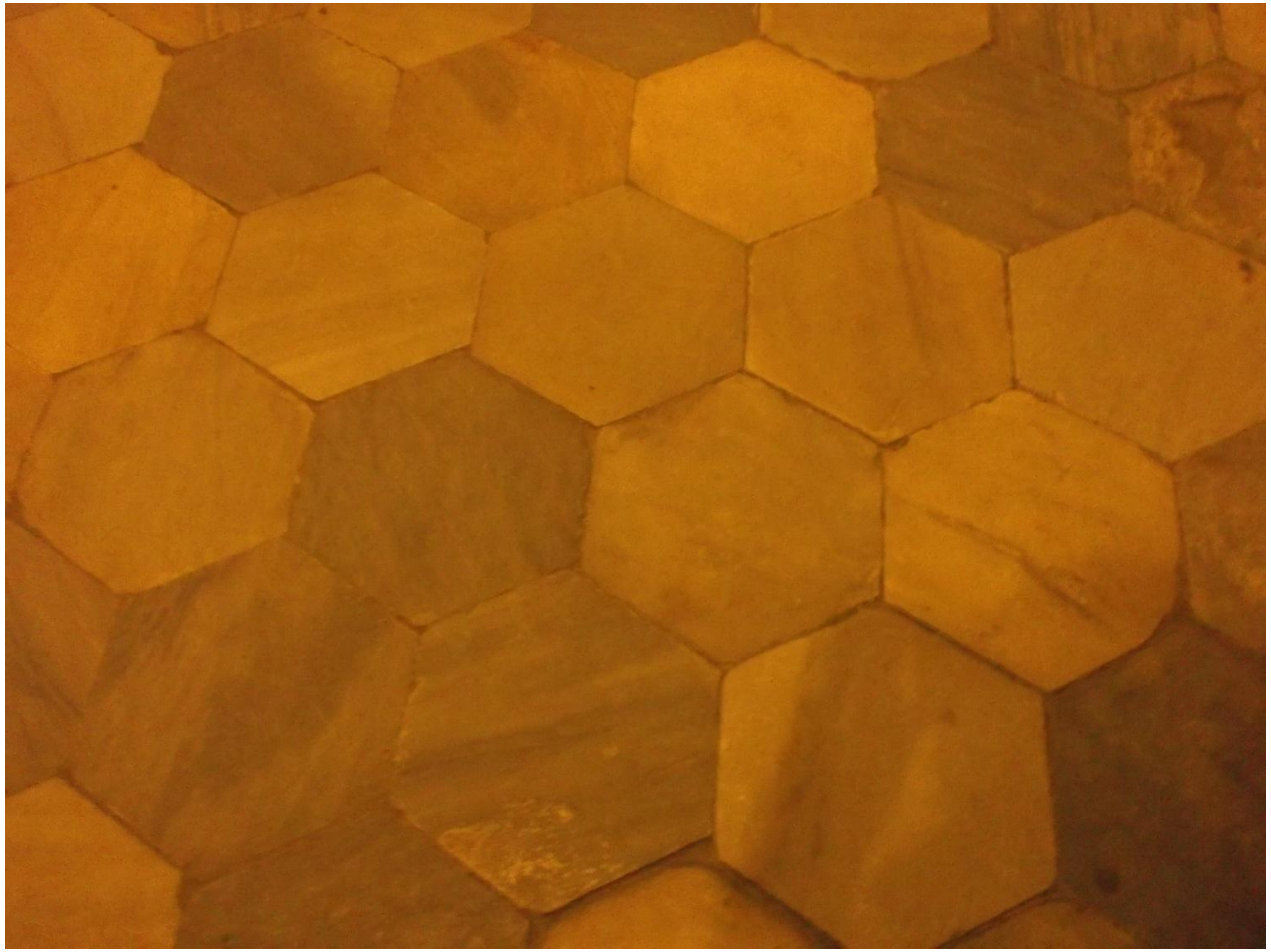


6-6-6

Parkietaże platońskie we Wrocławiu

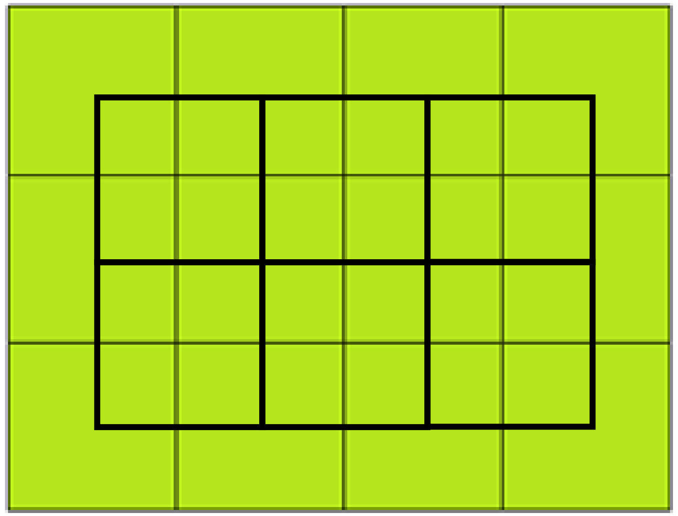
Parkietaż platoński, ul. Sienkiewicza, Wrocław

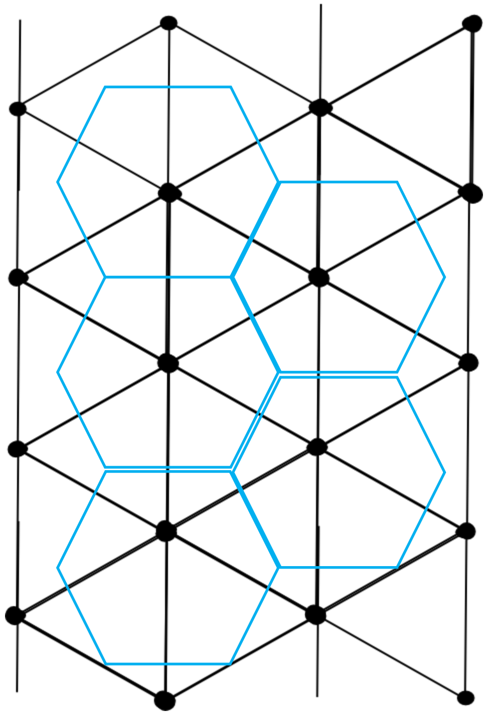
Parkietaż platoński, Katedra, Wrocław

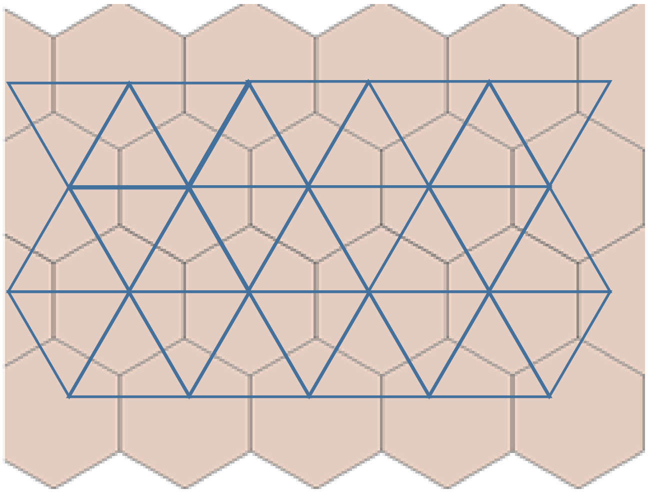


Parkietaże dualne

Parkietaże dualne



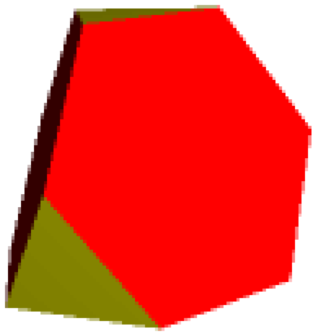




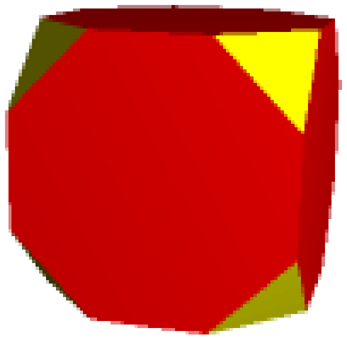
Wielościan półforemny (archimedesowy)

- naroża jednakowe,
- ściany są wielokątami foremnymi,
- z każdej strony wygląda tak samo.

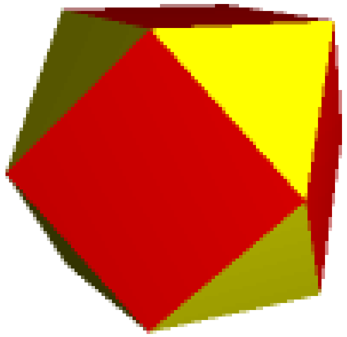
Wielościany półforemne (archimedesowe) powstałe w wyniku ścinania naroży wielościanów platońskich



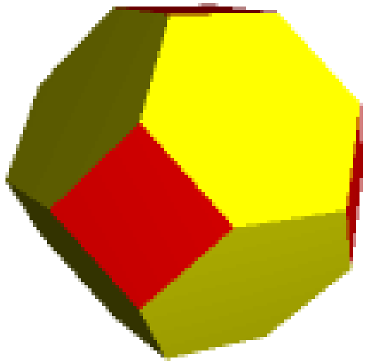
czworościan ścięty



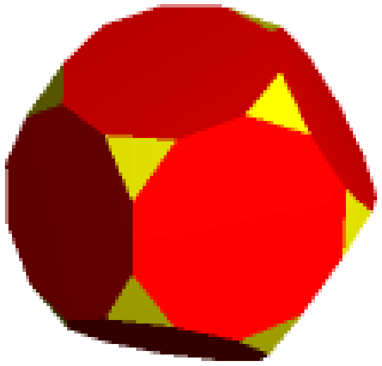
sześcian ścięty



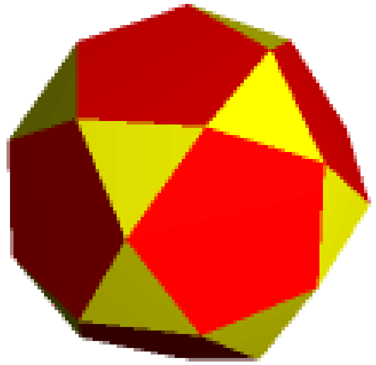
sześcio-ośmiościan



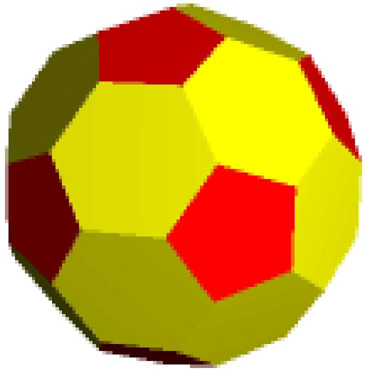
ośmiościan ścięty



dwunastościan ścięty

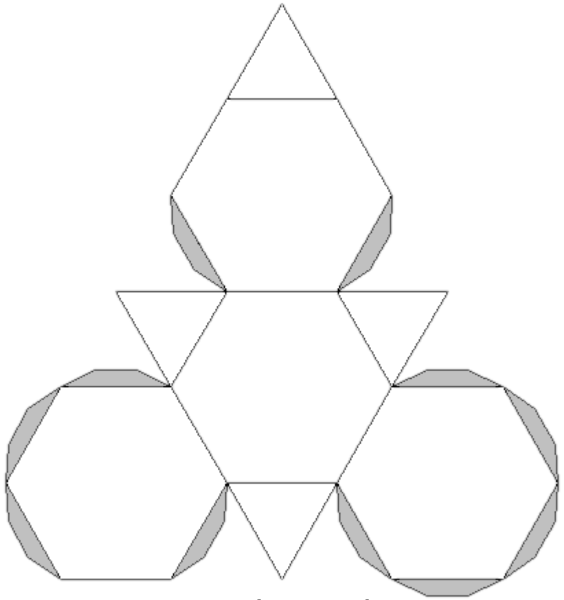


dwudziesto-dwunastościan

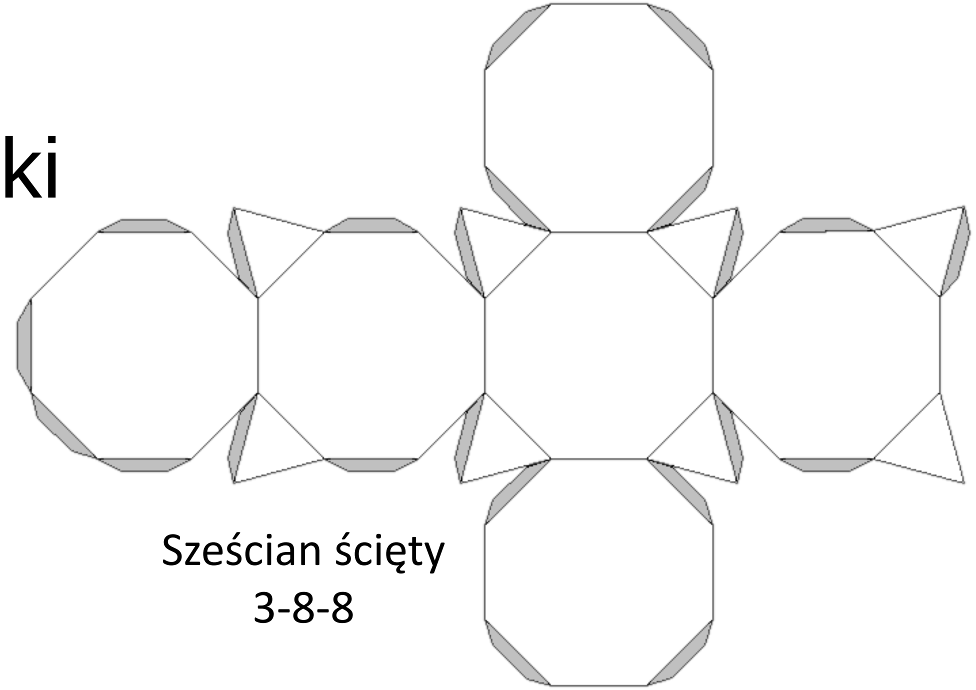


dwudziestościan ścięty

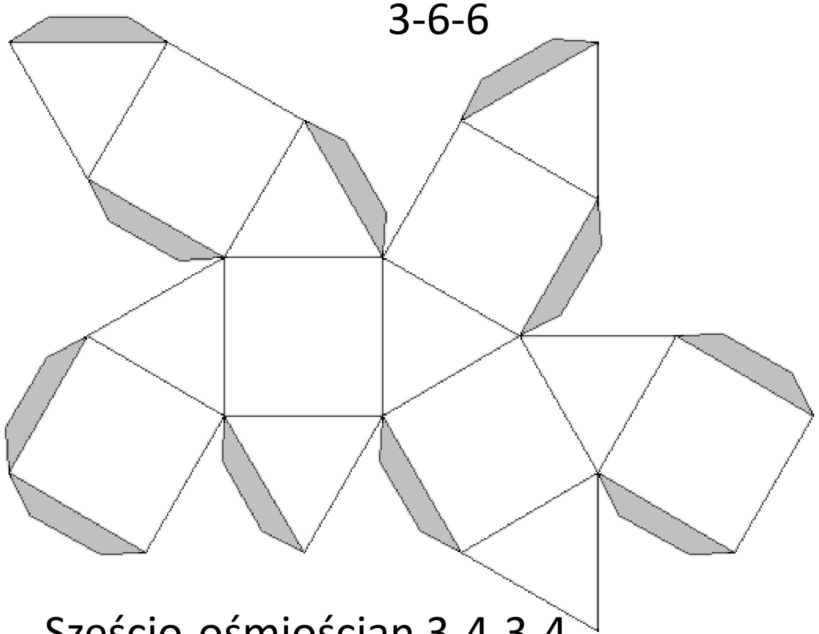
Wybrane siatki



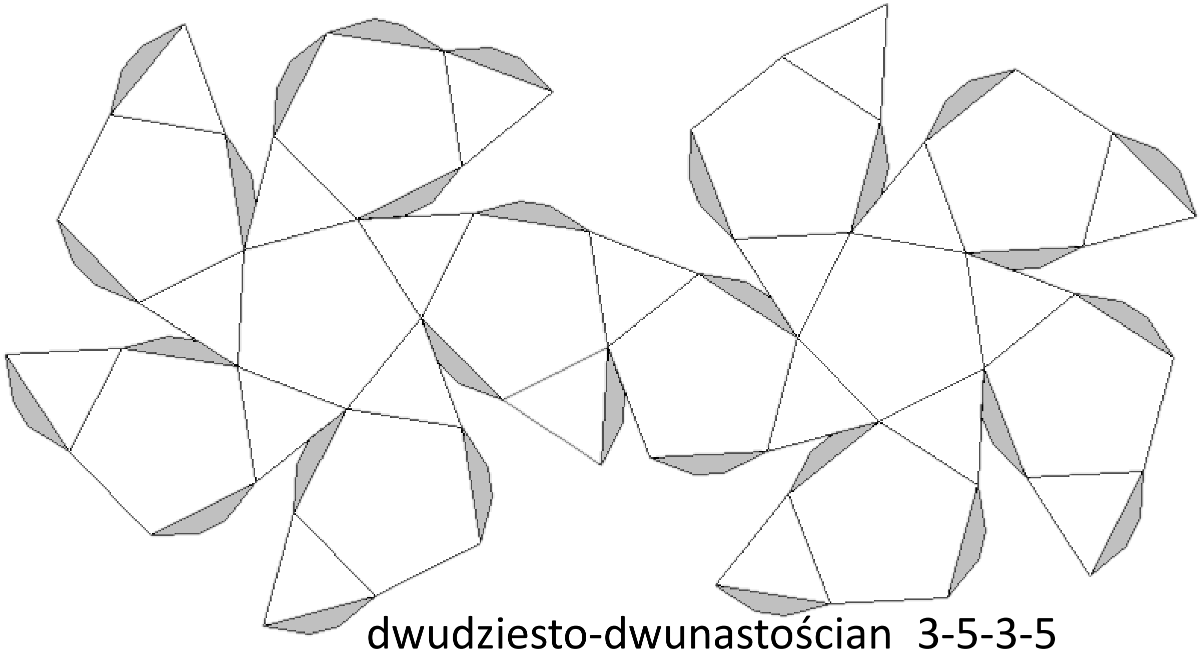
Czworościan ścięty
3-6-6



Sześcian ścięty
3-8-8

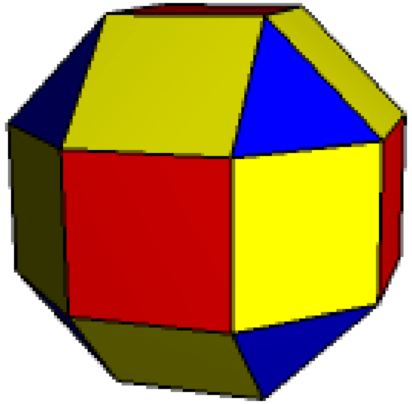


Sześcio-ośmiościan 3-4-3-4

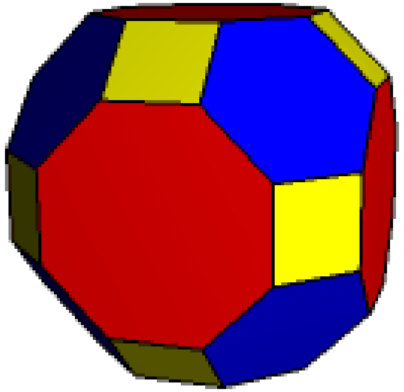


dwudziesto-dwunastościan 3-5-3-5

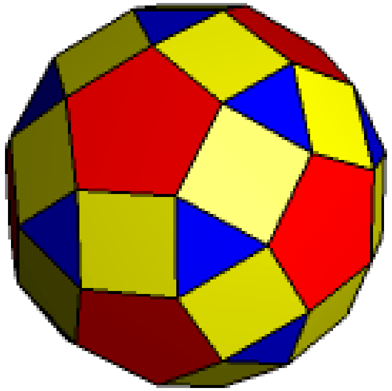
Wielościany półforemne (archimedesowe)



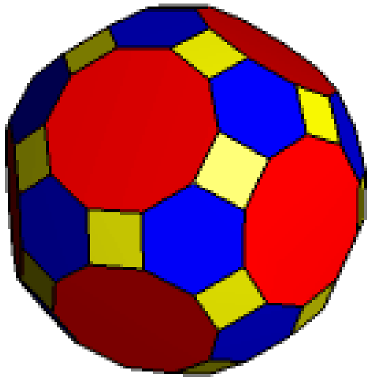
Sześcio-ośmiościan rombowy mały
3-4-4-4



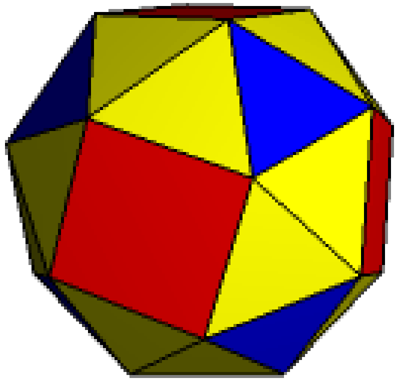
Sześcio-ośmiościan rombowy wielki
4-6-8



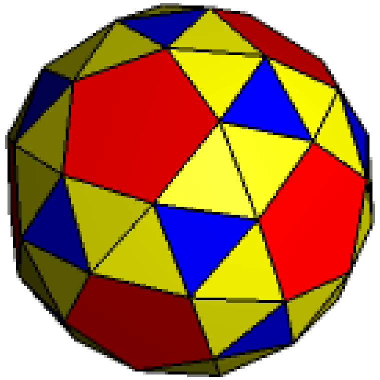
Dwudziesto-dwunastościan rombowy mały
3-4-5-4



Dwudziesto-dwunastościan rombowy wielki
4-6-10



Sześcio-ośmiościan przycięty
3-3-3-3-4



Dwudziesto-dwunastościan przycięty
3-3-3-3-5

Parkietaż półforemny (archimedesowy)

- płytki foremne,
- wierzchołki jednakowe.

Parkietaże półforemne (archimedesowe)

dwupłytkowe

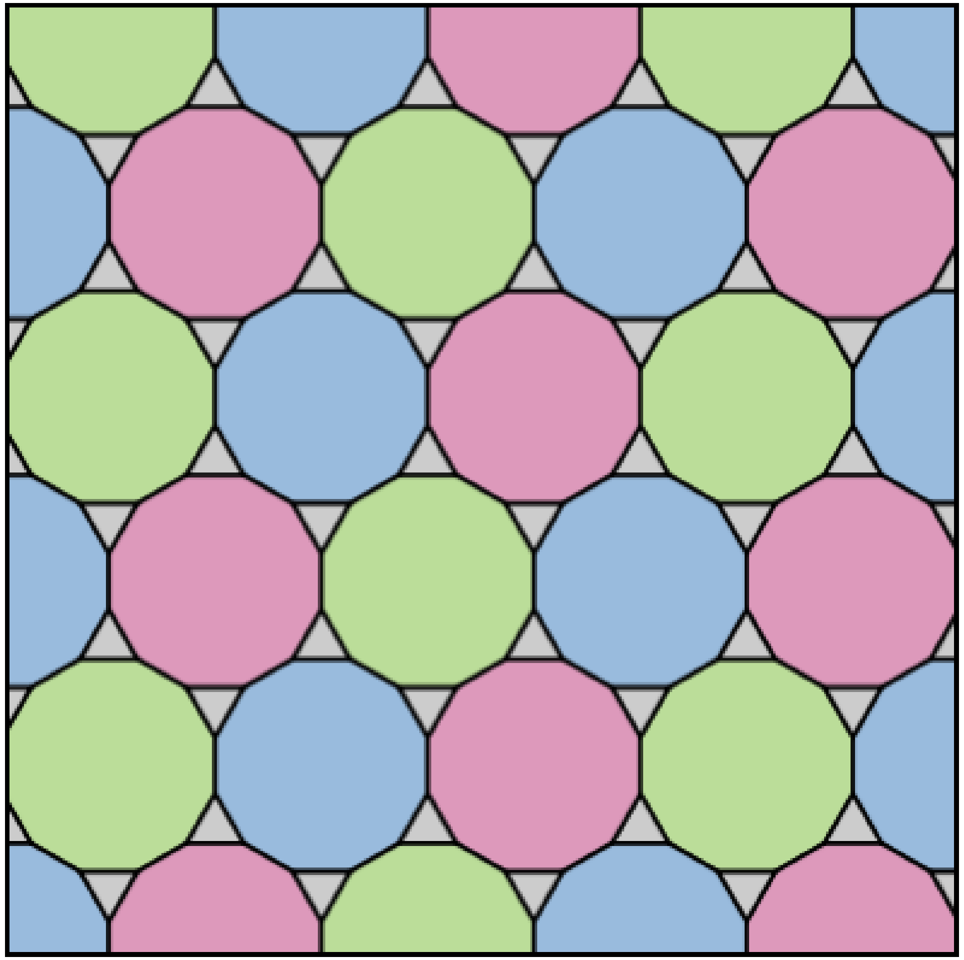
trzypłytkowe

Ile jest możliwych parkietaży półforemnych?

Najmniejsza ilość wielokątów jaką zgromadzić można wokół punktu, szczelnie pokrywając nimi powierzchnię, wynosi 3, największa zaś 6.

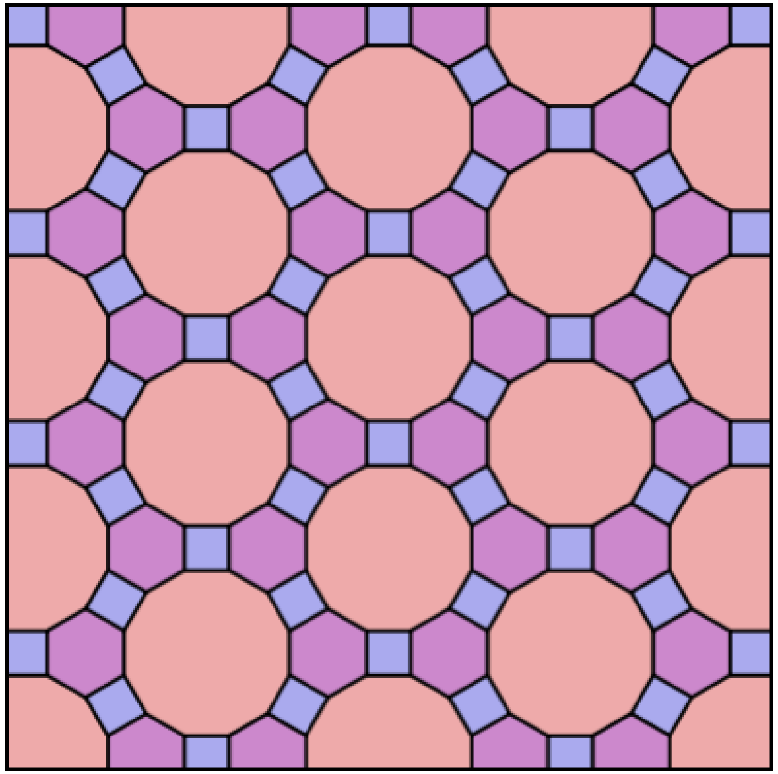
Ile jest możliwych parkietaży półforemnych?

Jedyną kombinacją, przy której <u>dookoła trójkąta</u> powierzchnia będzie szczelnie wypełniona jest kombinacja $\boldsymbol{n_1 = 3, n_2 = 12, n_3 = 12}$

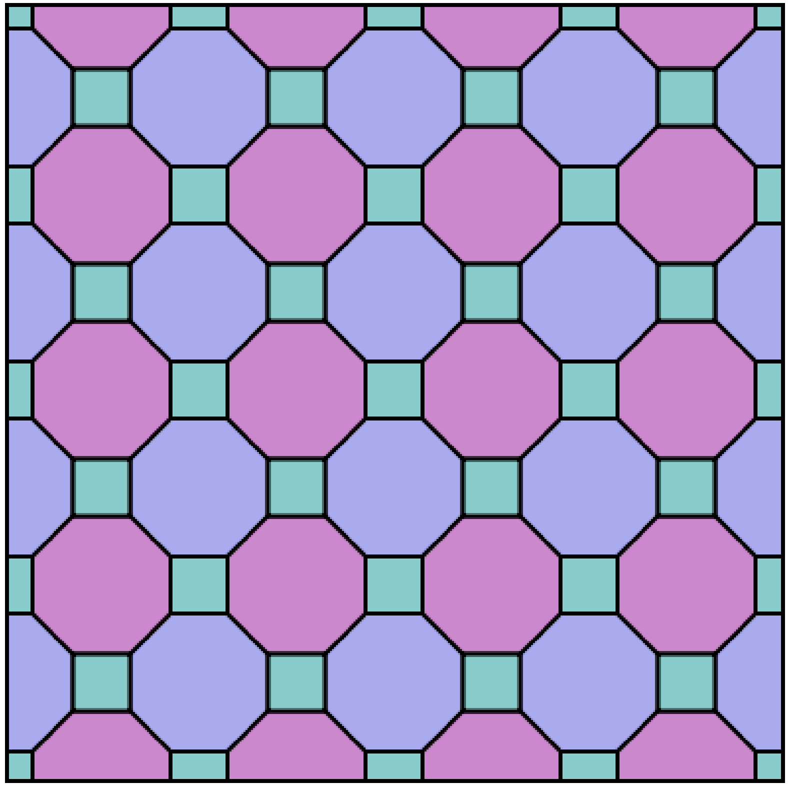


Możliwe kombinacje użycia trzech płytek, przy których dookoła kwadratu powierzchnia będzie szczelnie wypełniona to:

$n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 12$

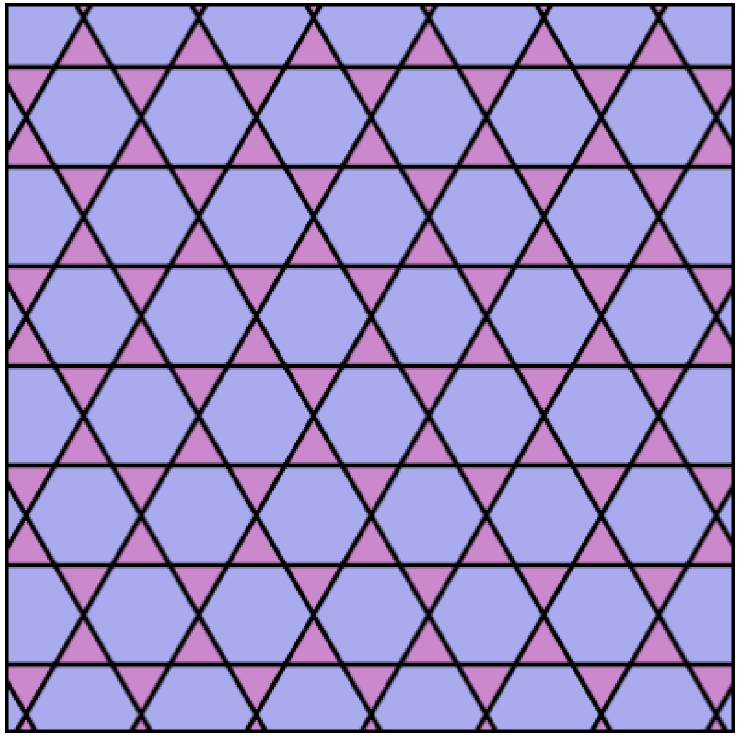


$n_1 = 4$, $n_2 = 8$, $n_3 = 8$

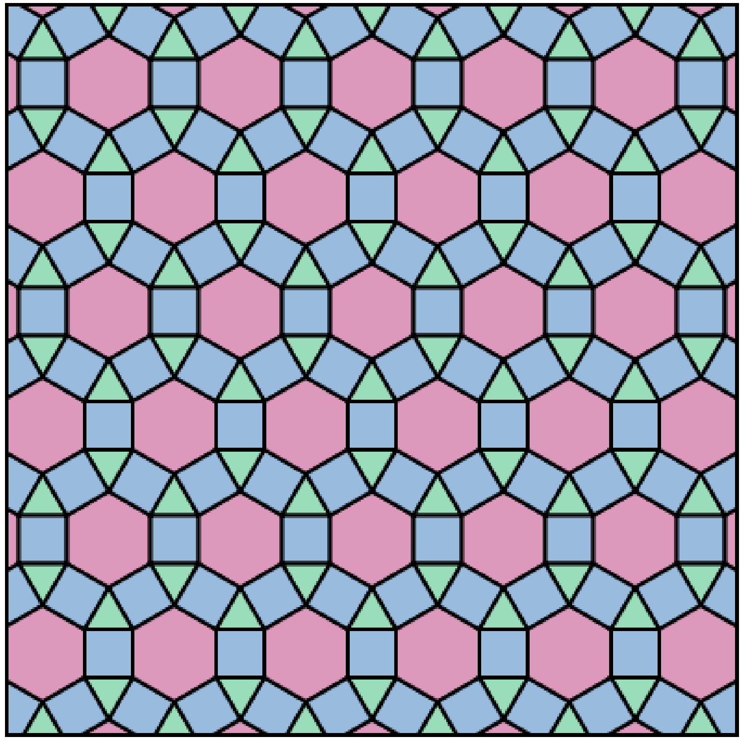


Możliwe kombinacje użycia <u>czterech wielokątów foremnych</u>, przy których powierzchnia będzie szczelnie wypełniona to:

Kombinacja n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 6, n_4 = 6

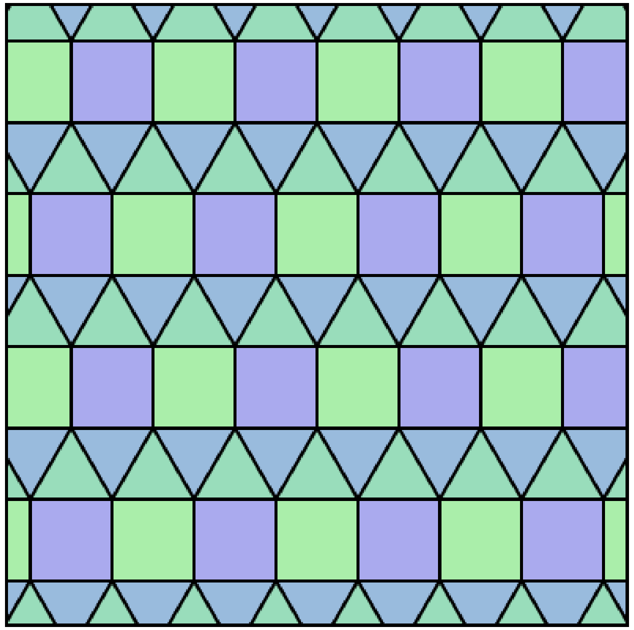


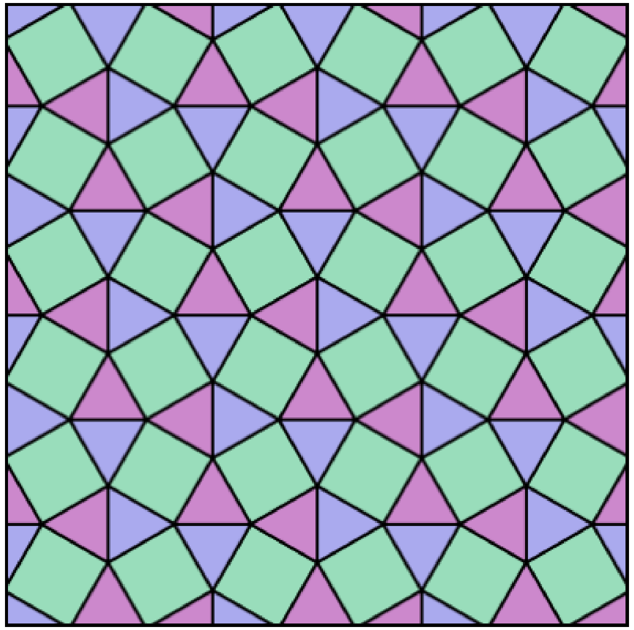
Kombinacja n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 4, n_4 = 6



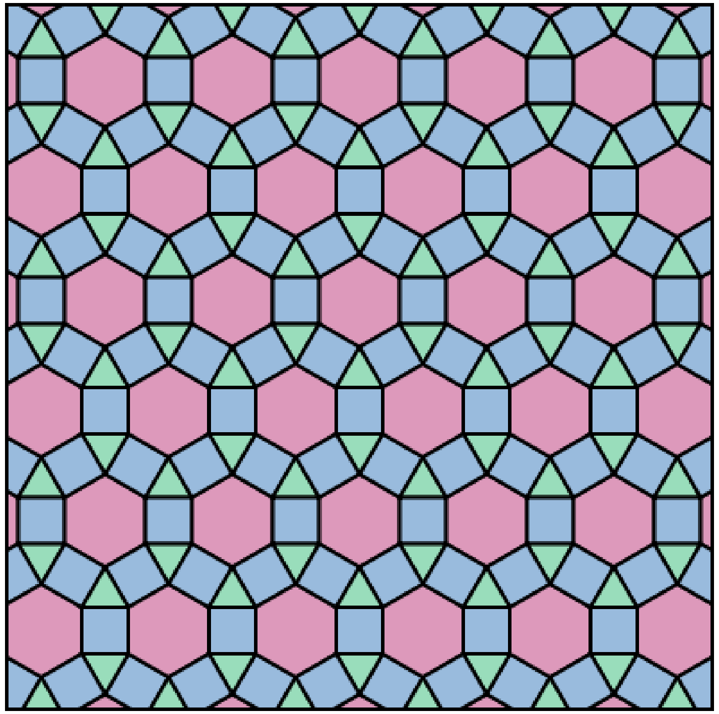
Możliwe kombinacje, kiedy w jednym punkcie schodzi się pięć wielokątów foremnych, przy których powierzchnia będzie szczelnie wypełniona to:

Kombinacja $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 3$, $n_4 = 4$, $n_5 = 4$ daje następujące parkietaże



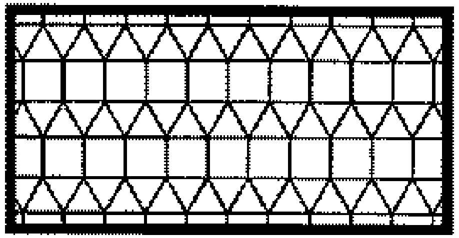


A kombinacja $n_1 = 3$, $n_2 = 4$, $n_3 = 4$, $n_4 = 6$

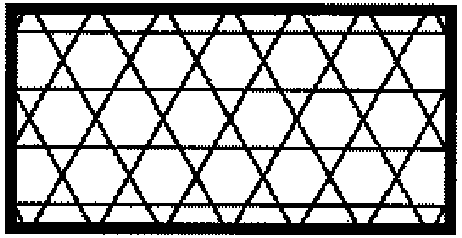


Wniosek:

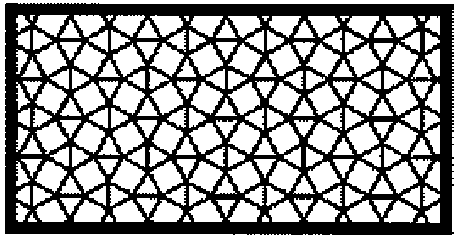
Jest osiem różnych parkietaży półforemnych.



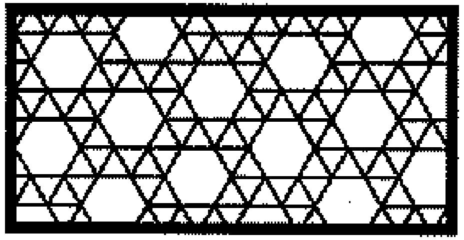
3.3.3.4.4



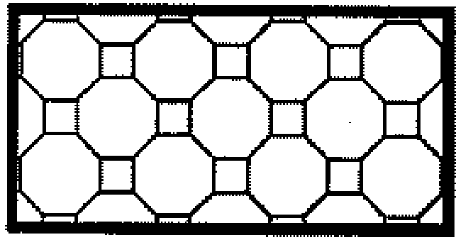
3.6.3.6



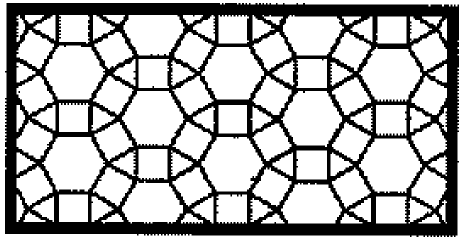
3.3.4.3.4



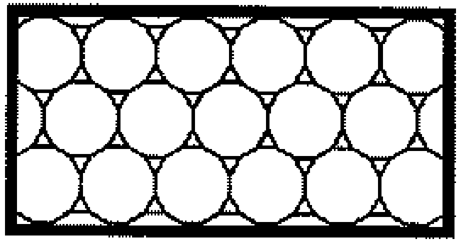
3.3.3.3.6



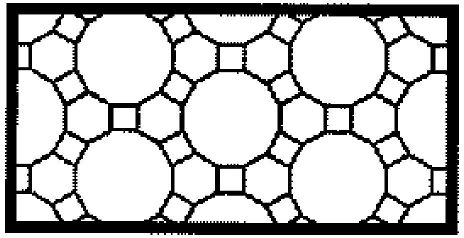
4.8.8



3.4.6.4

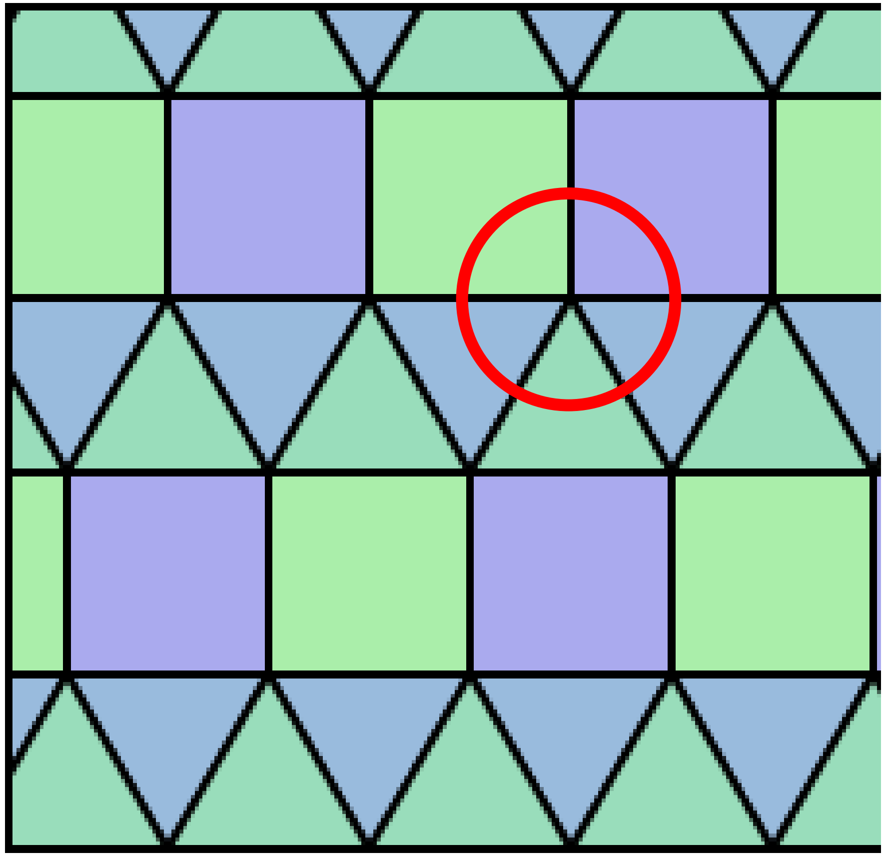


3.



4.6.12

Oznaczanie/kodowanie



3-3-3-4-4

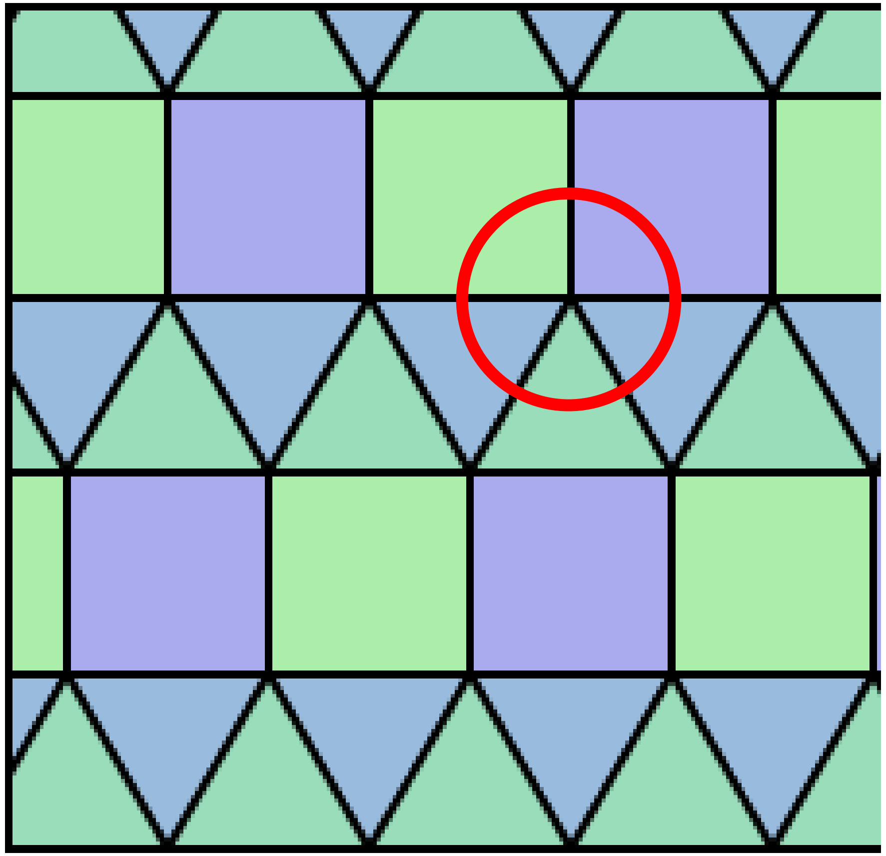
3-4-4-3-3

3-3-4-4-3

4-4-3-3-3

4-3-3-3-4

Oznaczanie/kodowanie



3-3-3-4-4

3-4-4-3-3

3-3-4-4-3

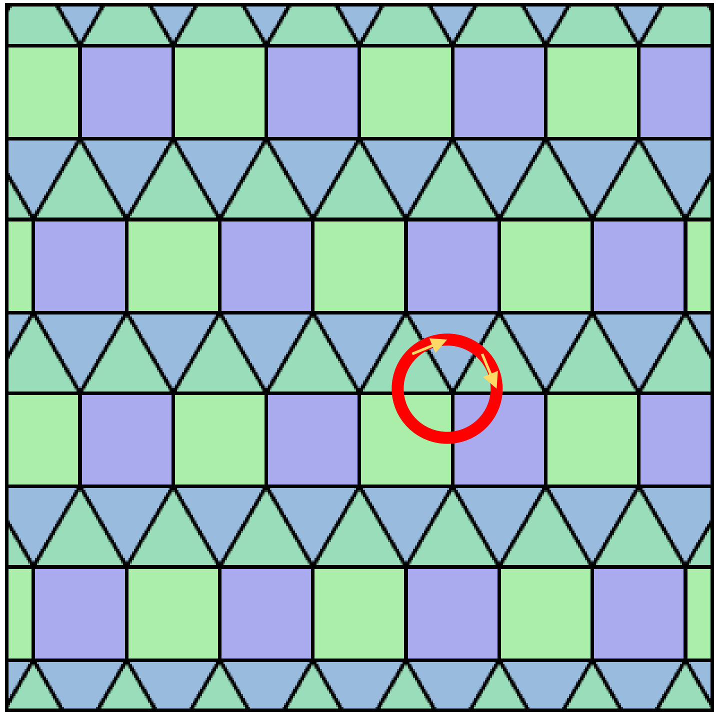
4-4-3-3-3

4-3-3-3-4

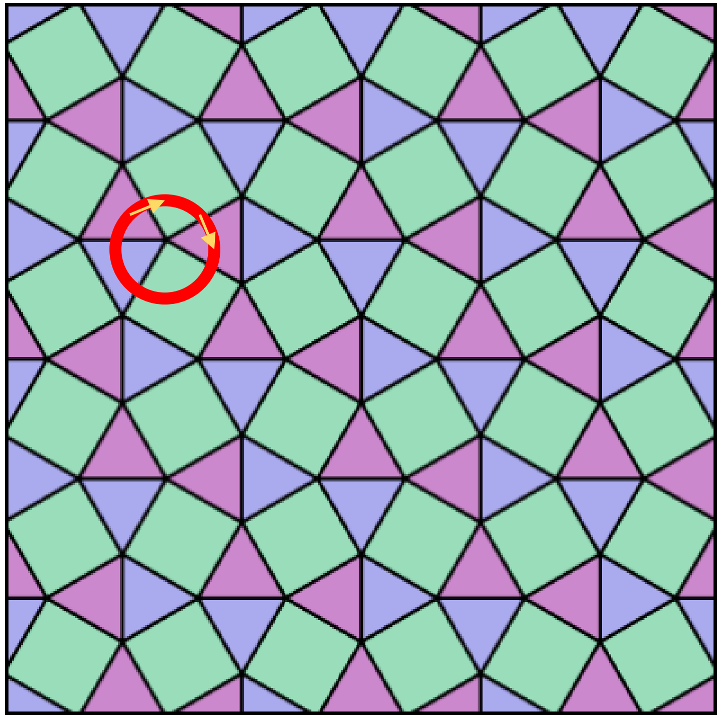
Inne:

- [3,3,3,4,4]
- $3^3.4^2$

Parkietaże półforemne (archimedesowe) dwupłytkowe

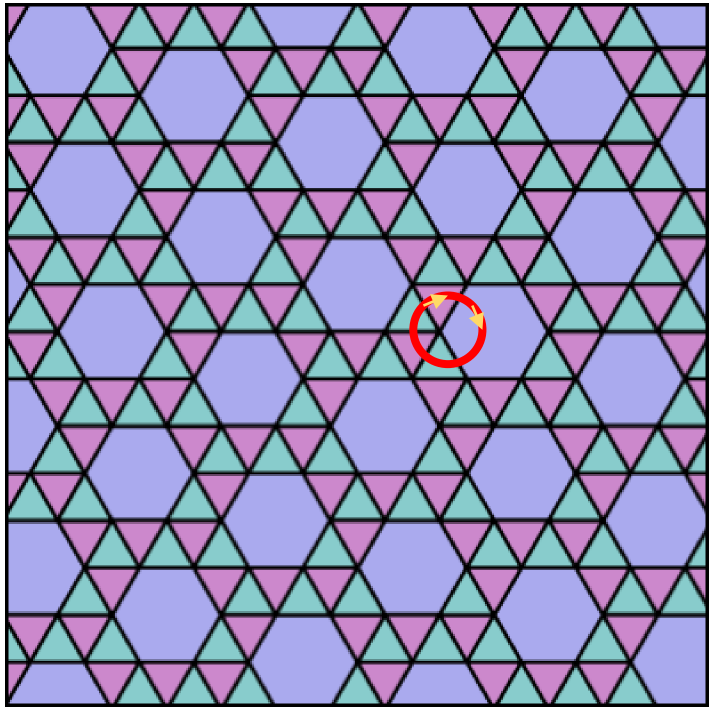


3-3-3-4-4

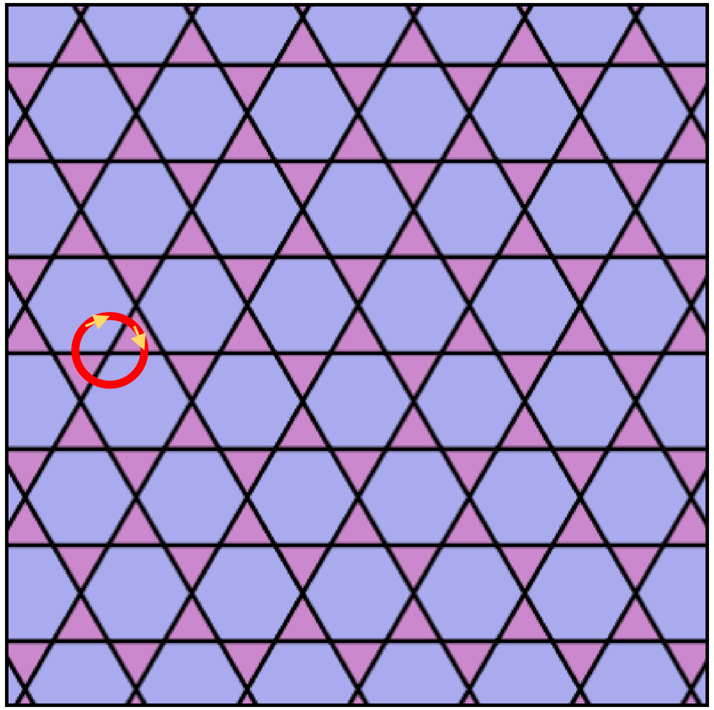


3-3-4-3-4

Parkietaże półforemne (archimedesowe) dwupłytkowe

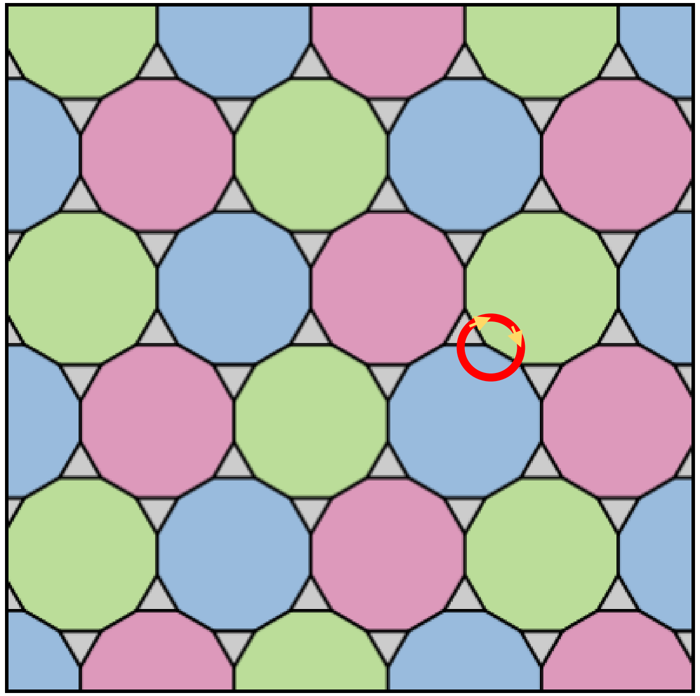


3-3-3-3-6

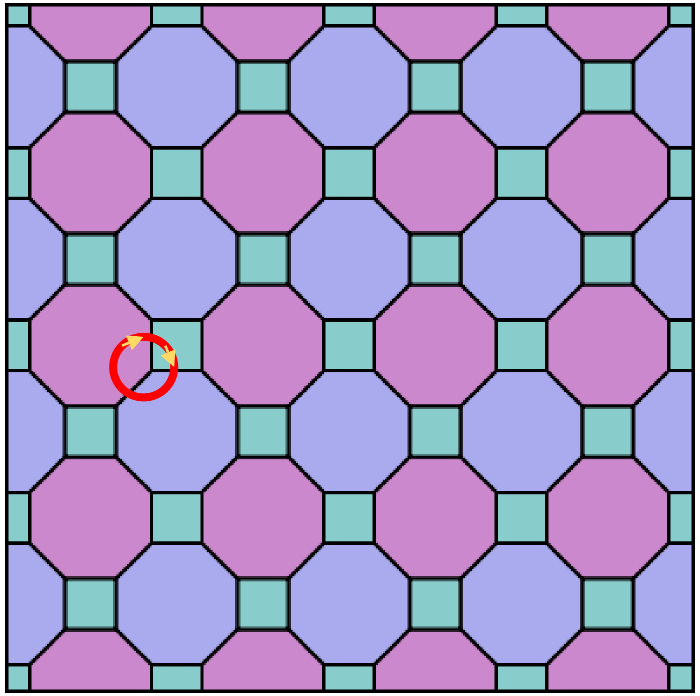


3-6-3-6

Parkietaże półforemne (archimedesowe) dwupłytkowe

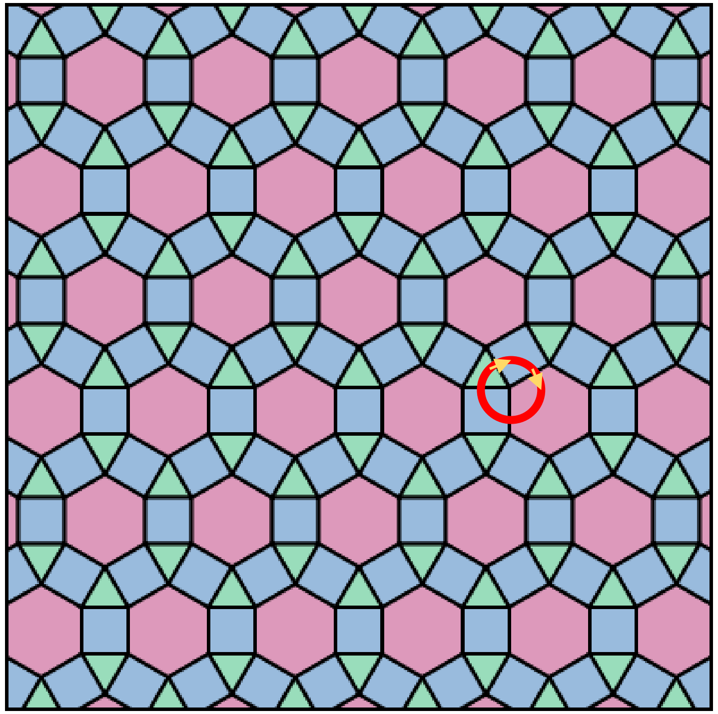


3-12-12

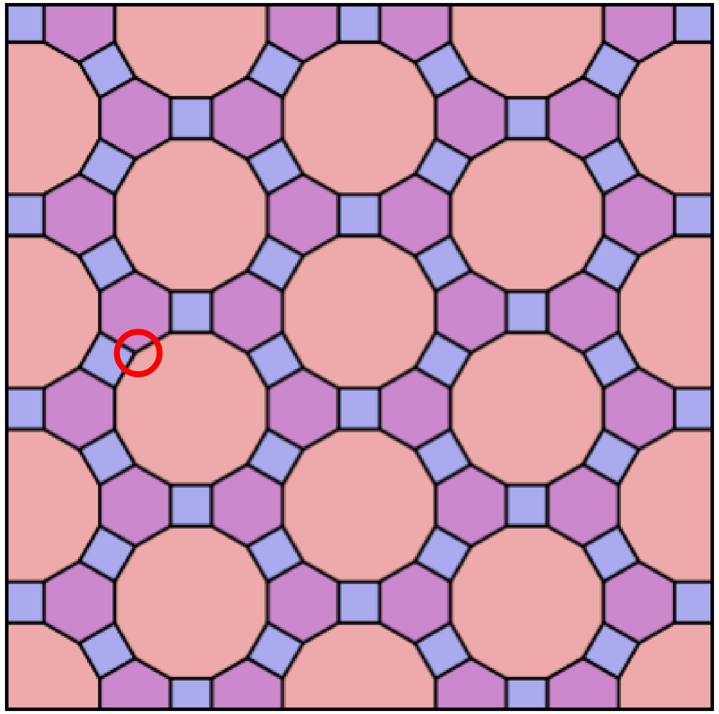


4-8-8

Parkietaże półforemne (archimedesowe) trzypłytkowe

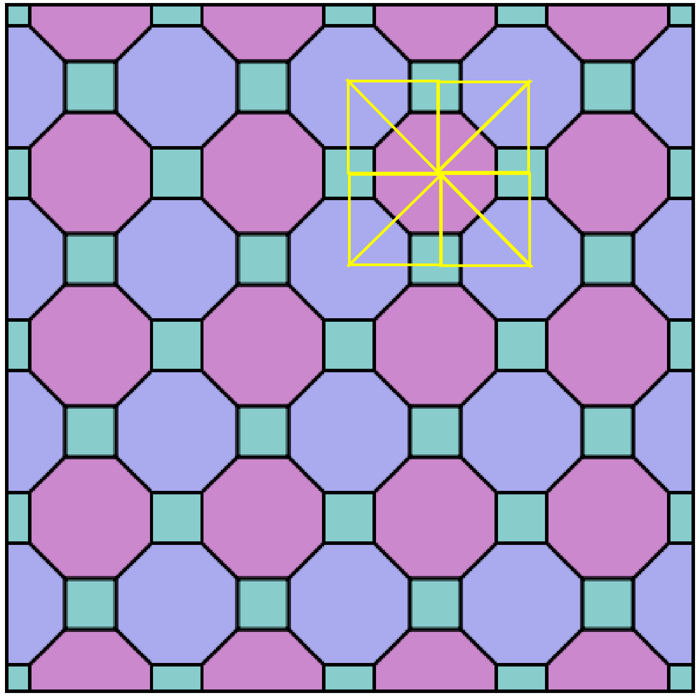


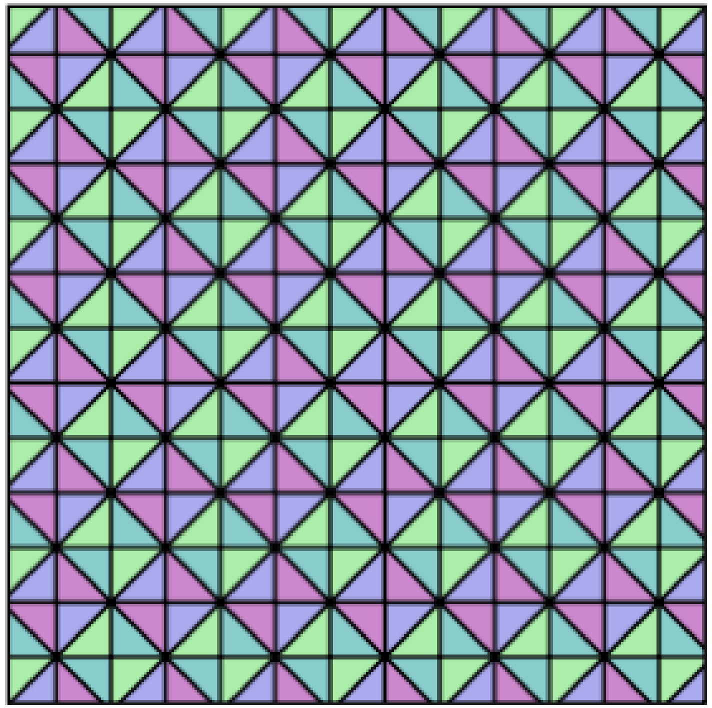
3-4-6-4



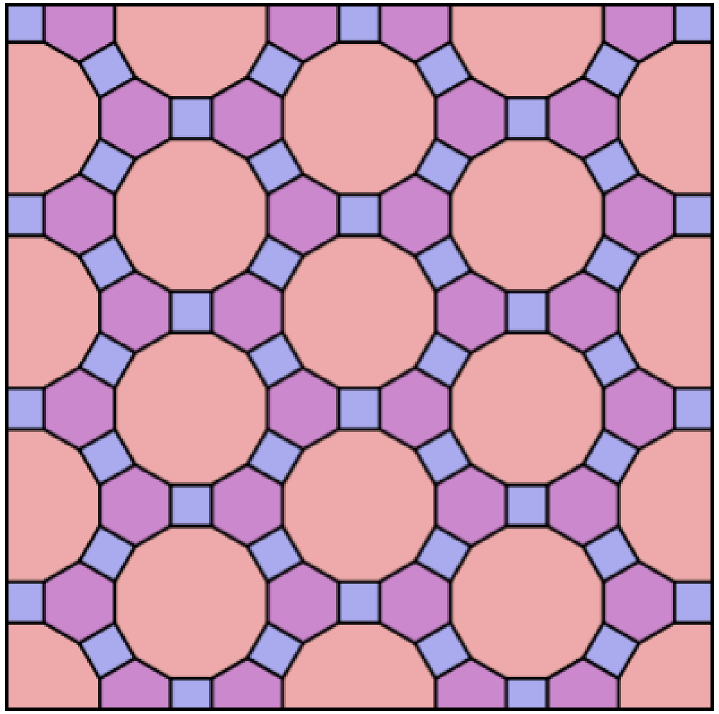
4-6-12

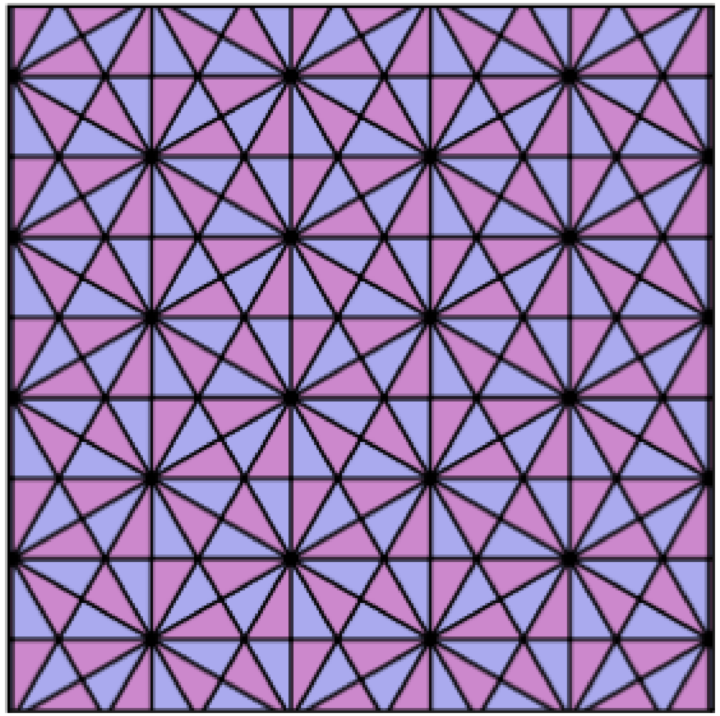
Parkietaże dualne do półforemnych



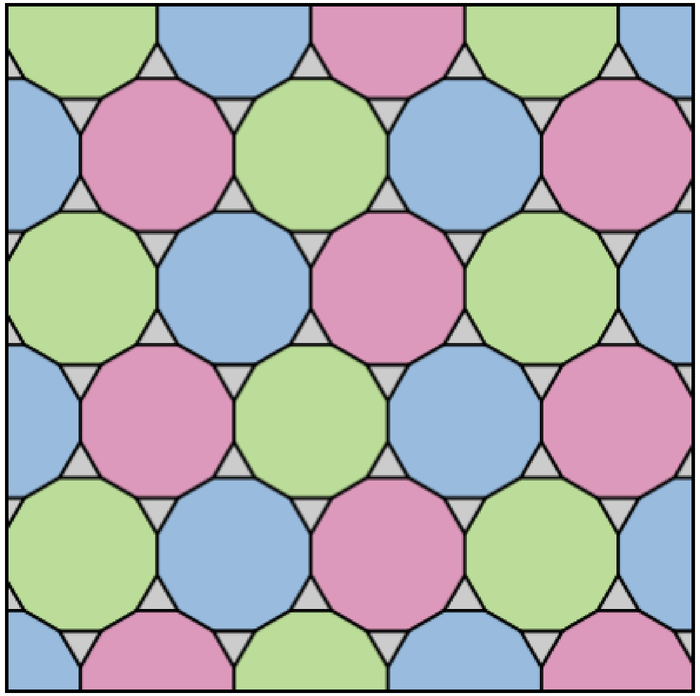


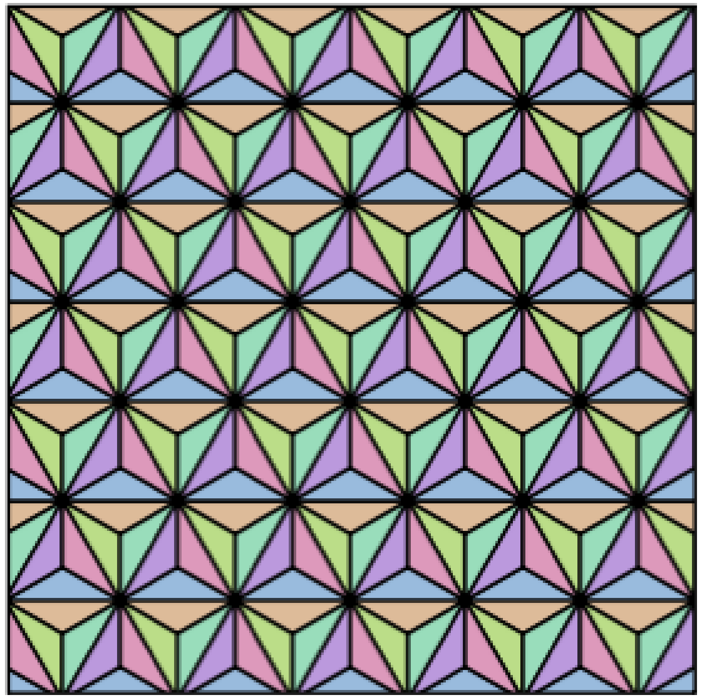
Parkietaże dualne do półforemnych



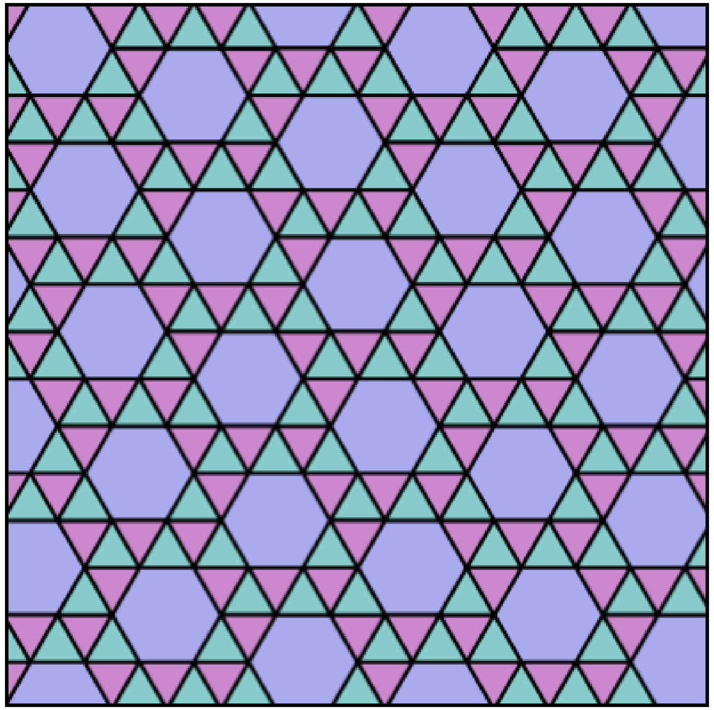


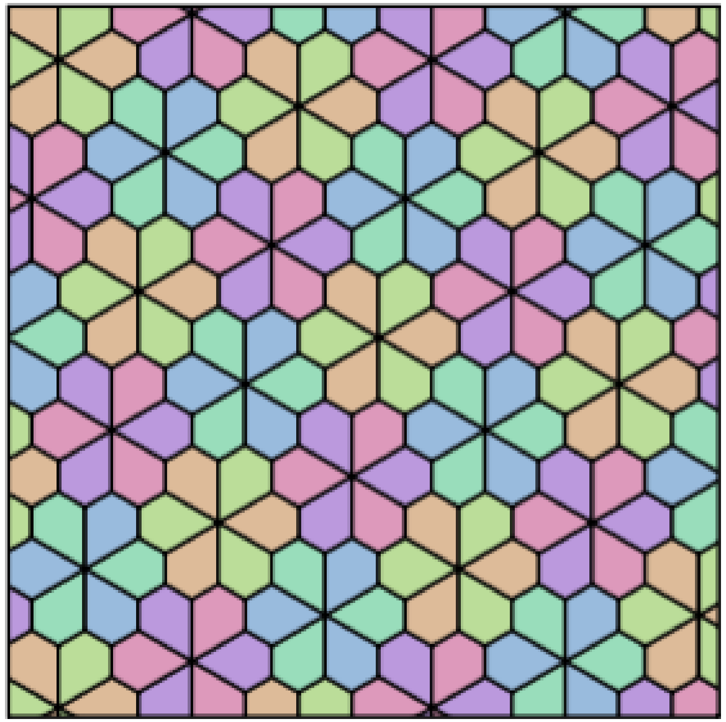
Parkietaże dualne do półforemnych



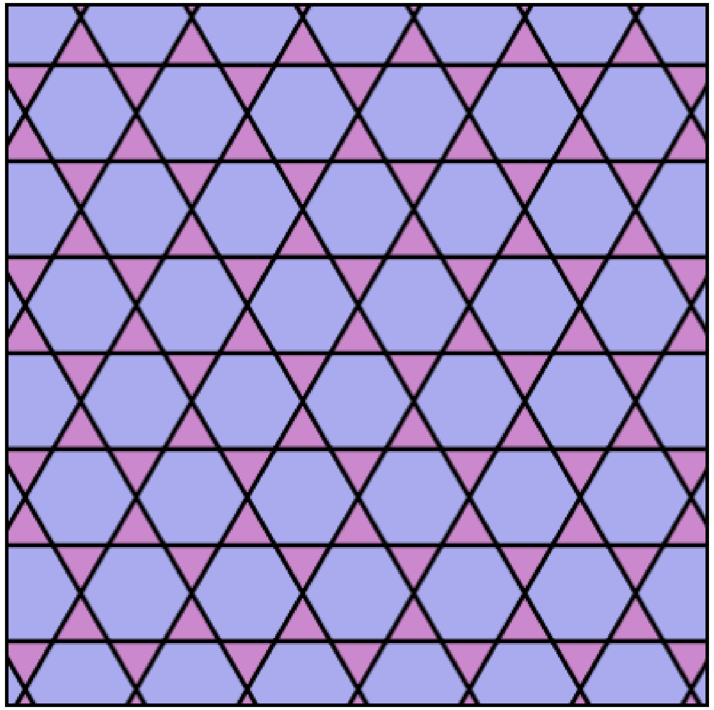


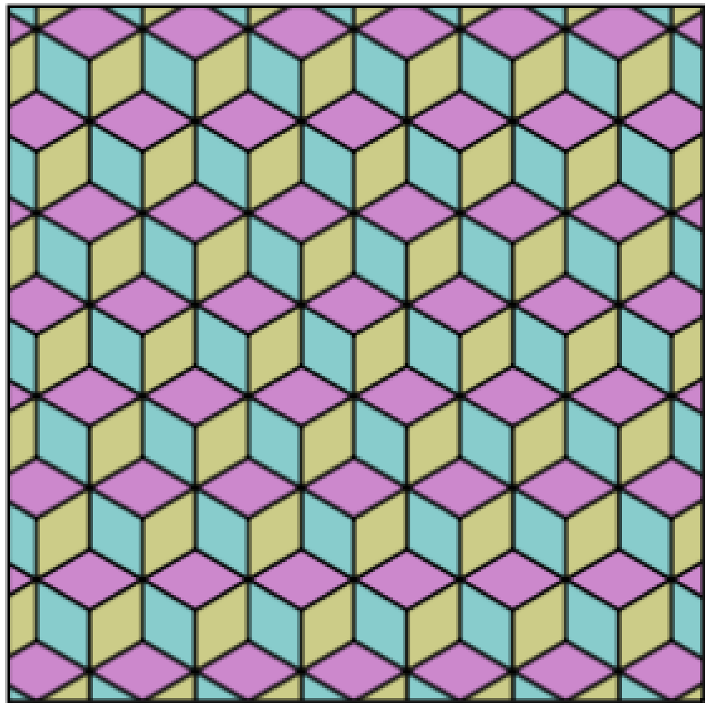
Parkietaże dualne do półforemnych



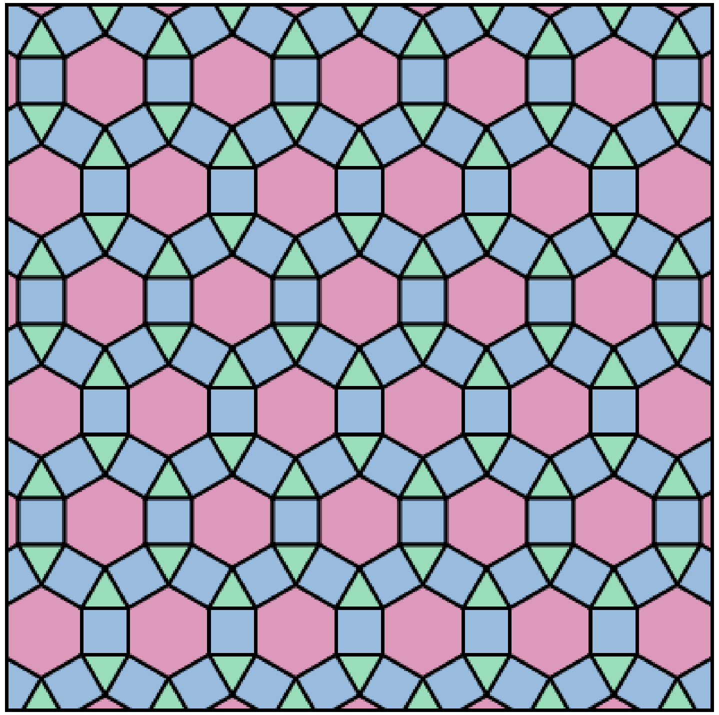


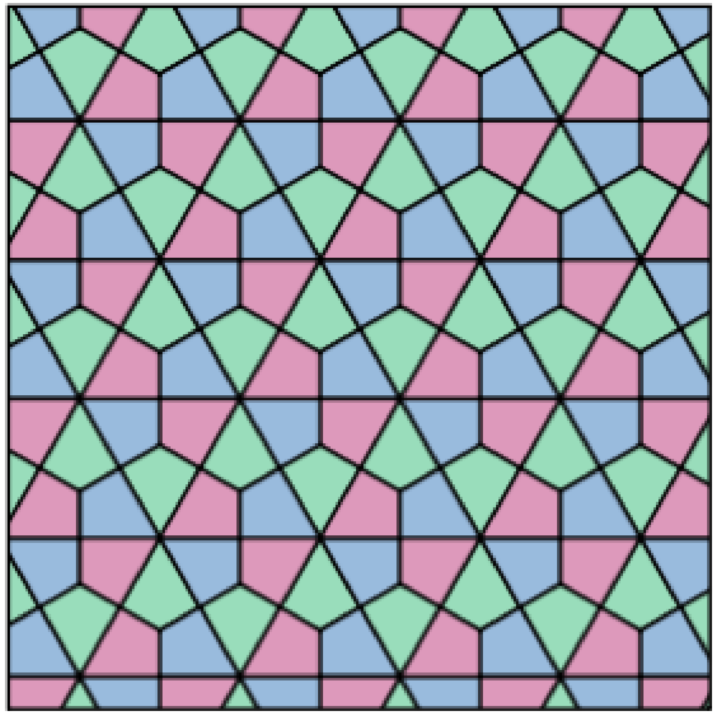
Parkietaże dualne do półforemnych



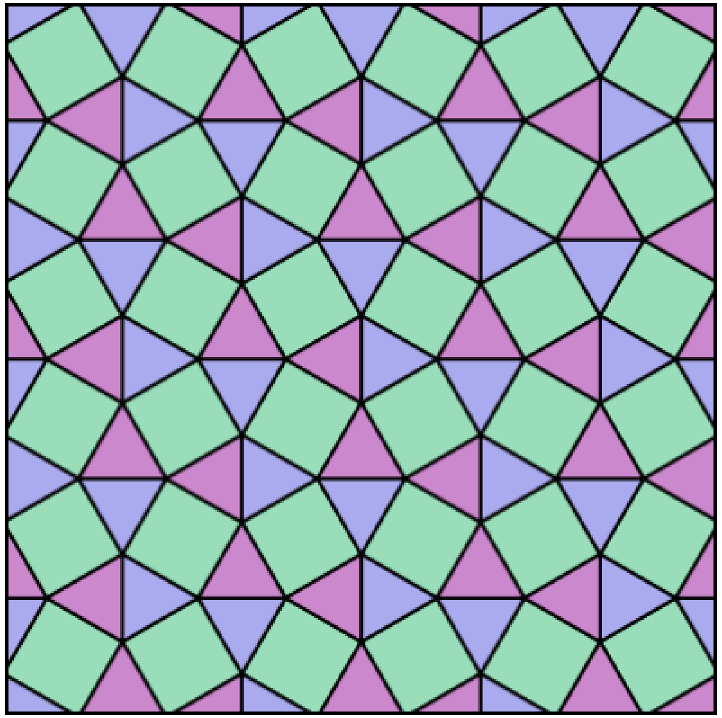


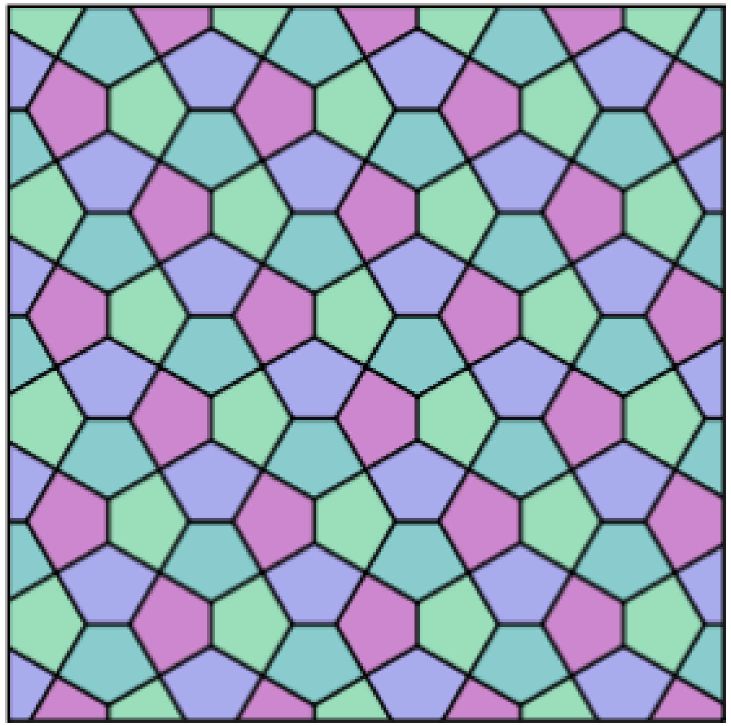
Parkietaże dualne do półforemnych



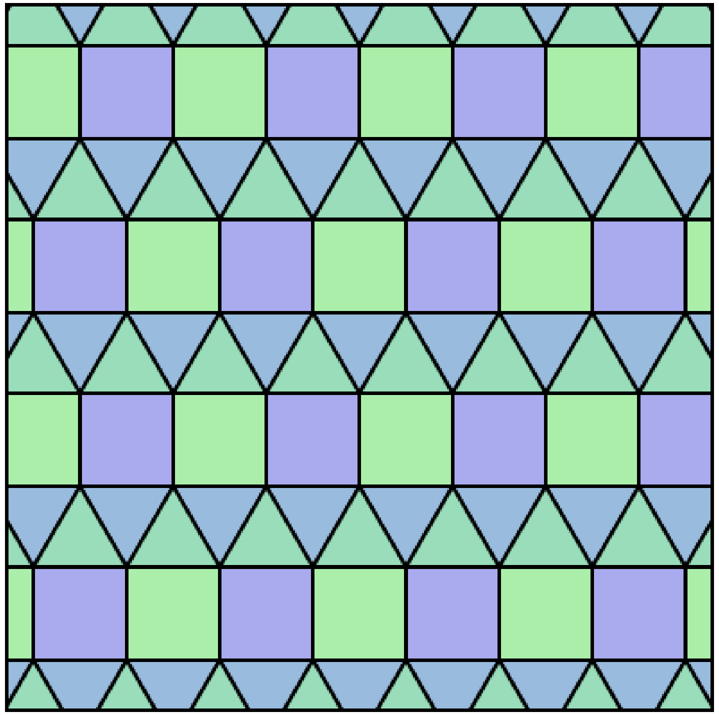


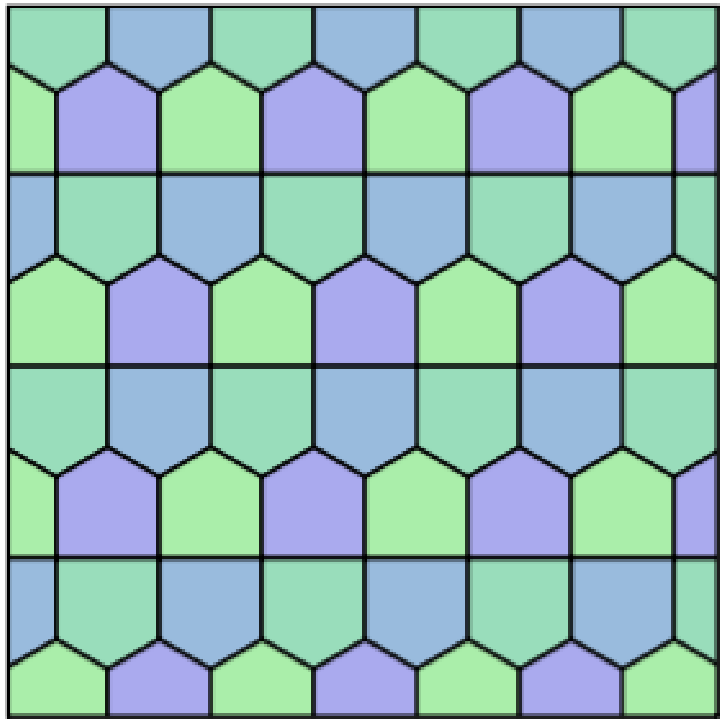
Parkietaże dualne do półforemnych





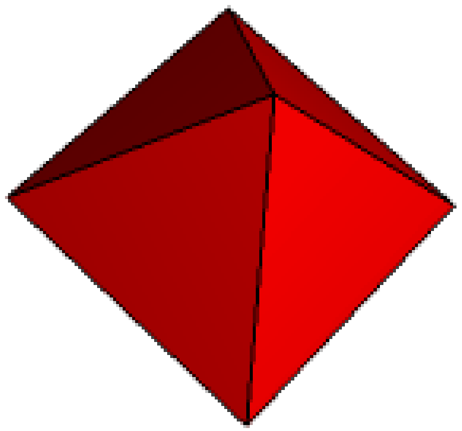
Parkietaże dualne do półforemnych



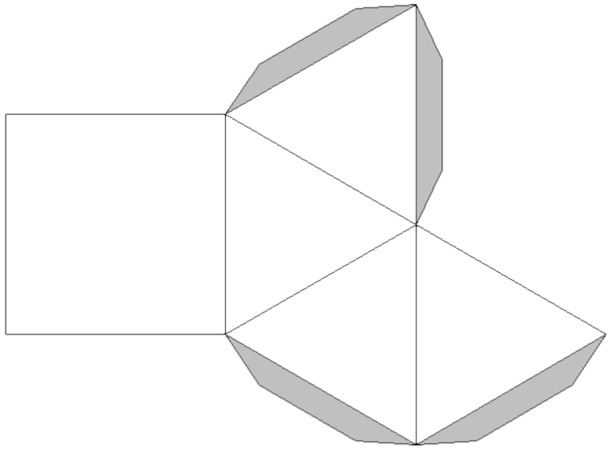


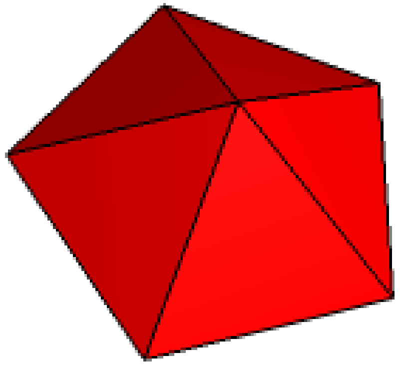
Wielościany foremnościenne (Johnsona)

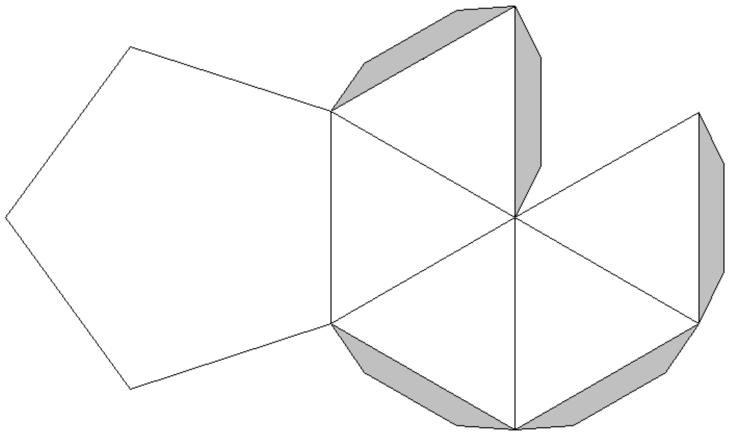
Przykłady wielościanów prostych (Johnsona)



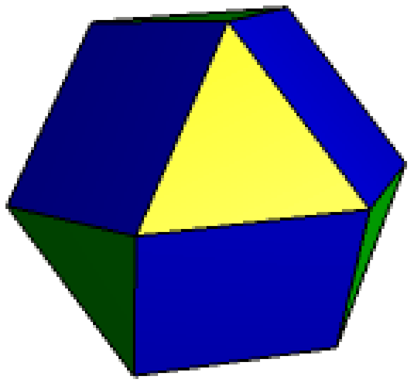
Piramida czworokątna

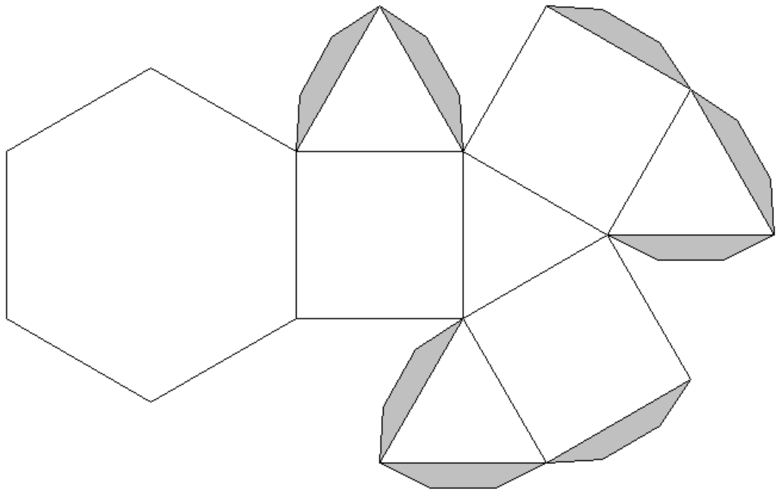




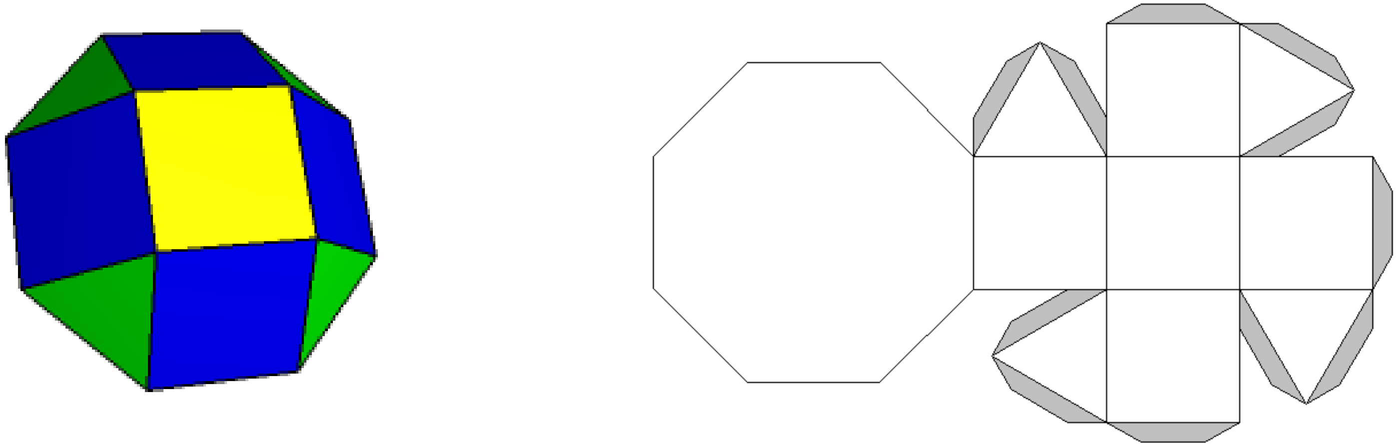


Piramida pięciokątna

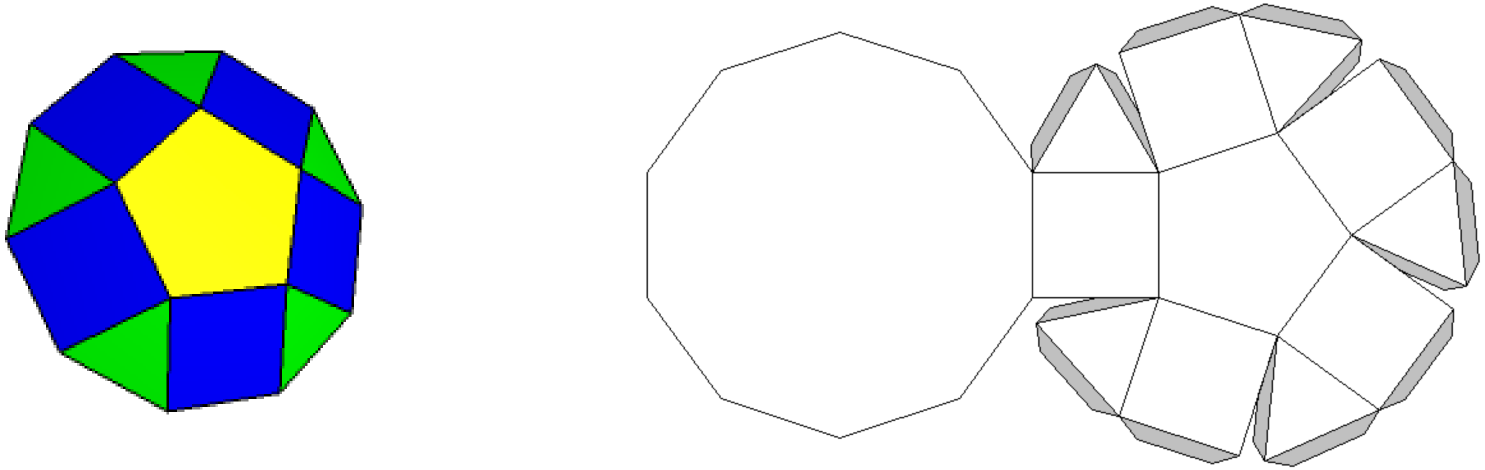




Kopuła trójkątna

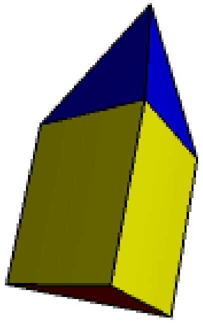


Kopuła czworokątna

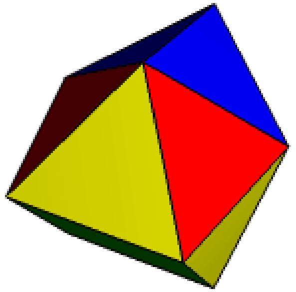


Kopuła pięciokątna

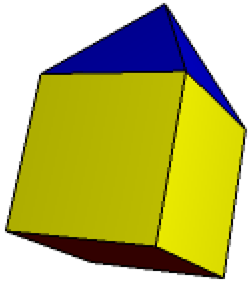
Wielościany Johnsona



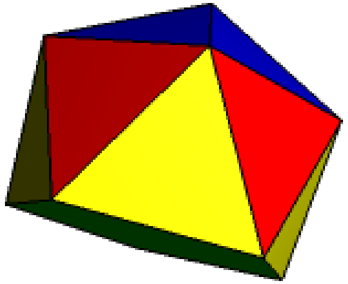
Wydłużona
piramida trójkątna



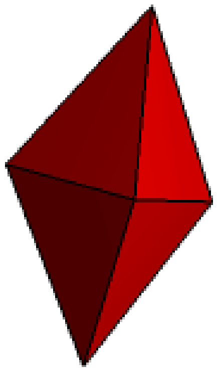
Skrętnie wydłużona piramida czworokątna



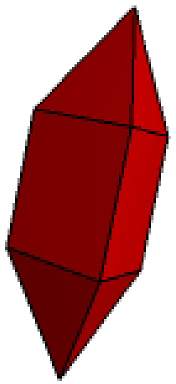
Wydłużona piramida
czworokątna



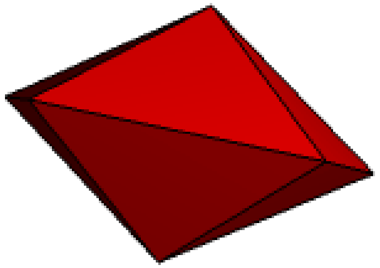
Skrętnie wydłużona piramida pięciokątna



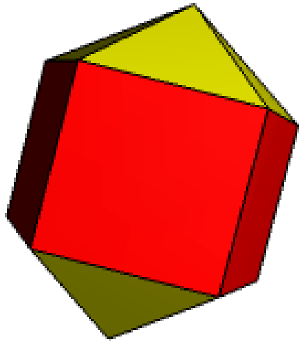
Dwupiramida trójkątna



Wydłużona dwupiramida trójkątna



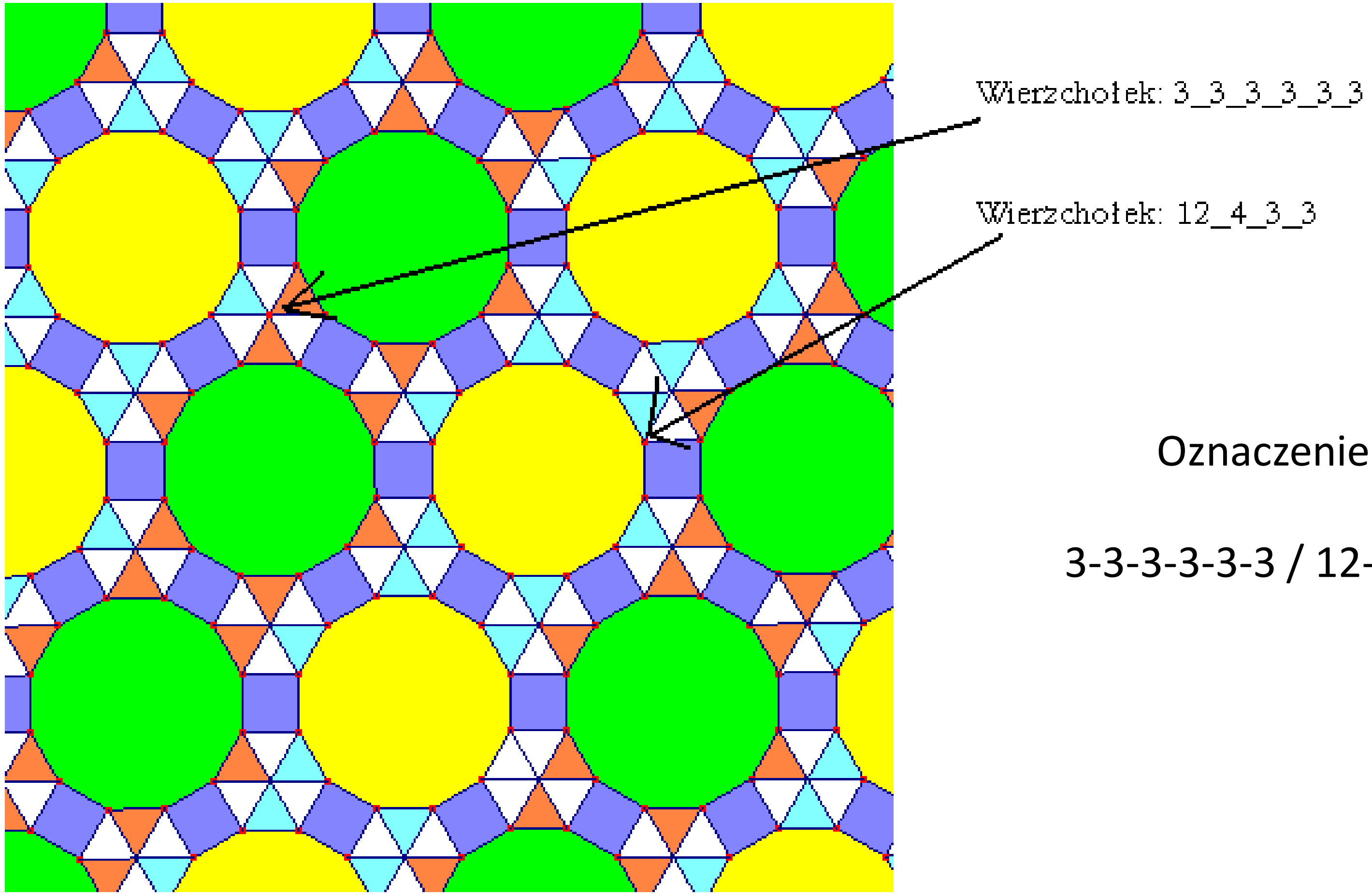
Dwupiramida pięciokątna



Wydłużona dwupiramida pięciokątna

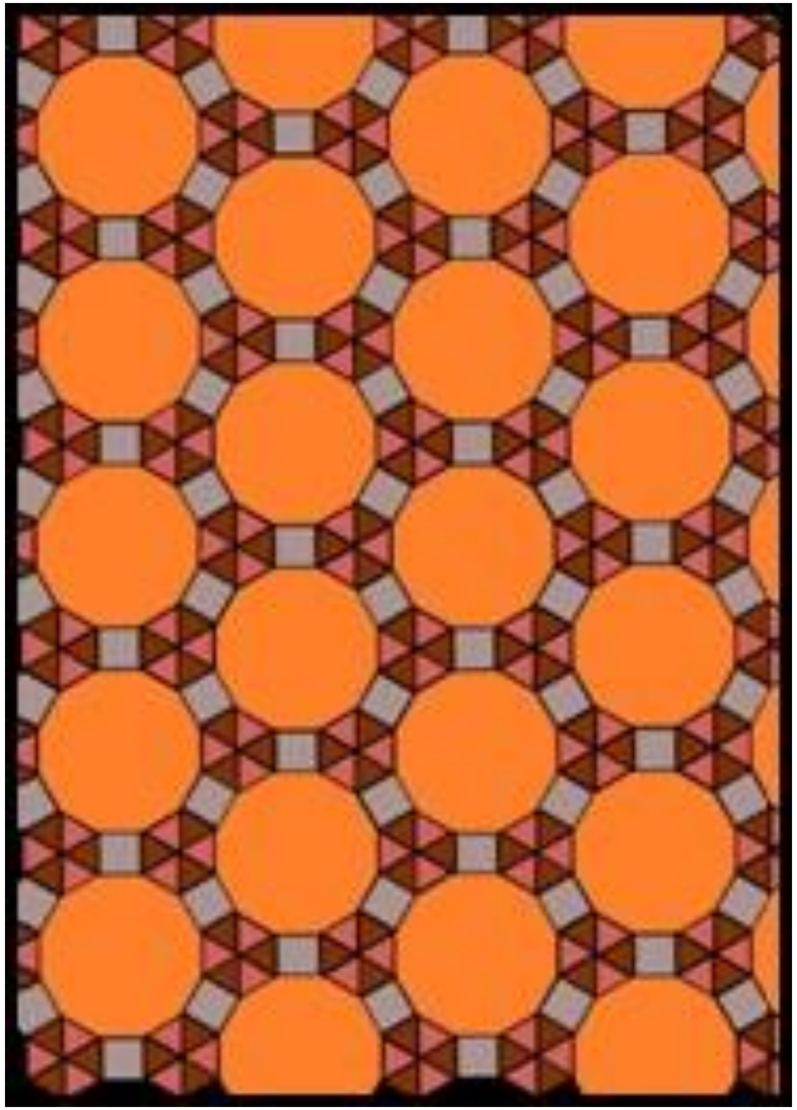
Parkietaże Johnsona (foremnościenne)

Przykłady parkietaży Johnsona

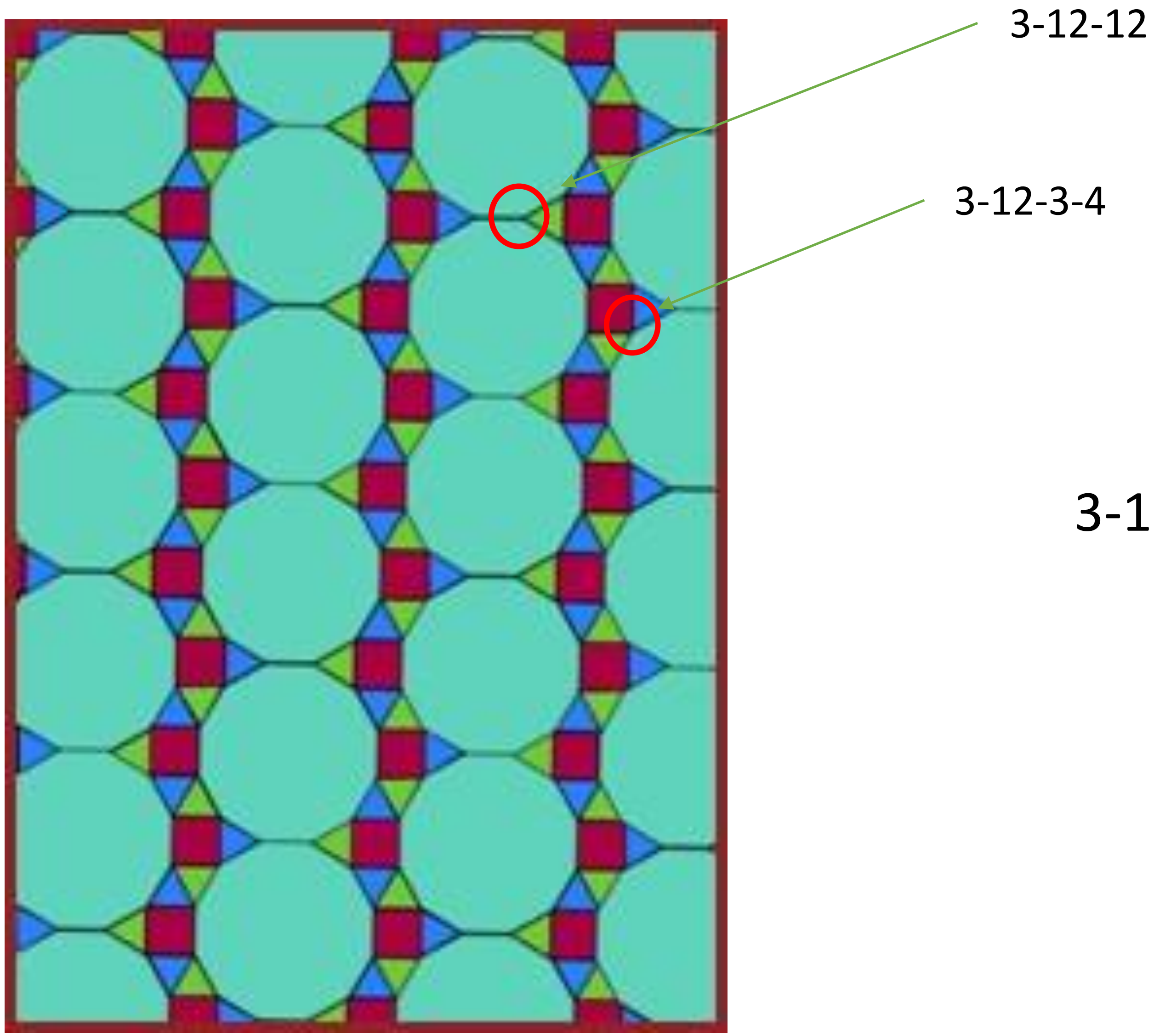


Oznaczenie:

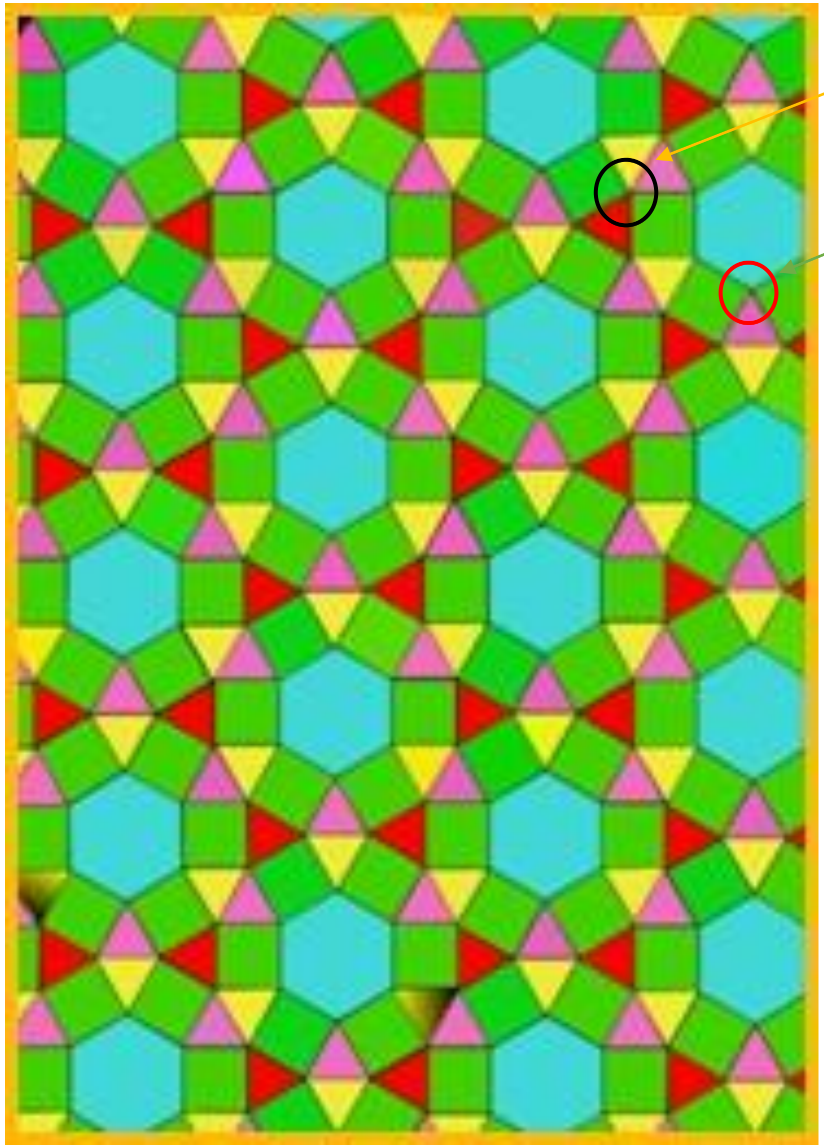
3-3-3-3-3-3 / 12-4-3-3



3-3-12-4 / 3-3-3-3-3-3



3-12-3-4 / 3-12-12



4-3-3-4-3

3-4-6-4

4-3-3-4-3 / 3-4-6-4

Parkiet nieforemny

- płytki nieforemne

naroża

przystające

nieprzystające

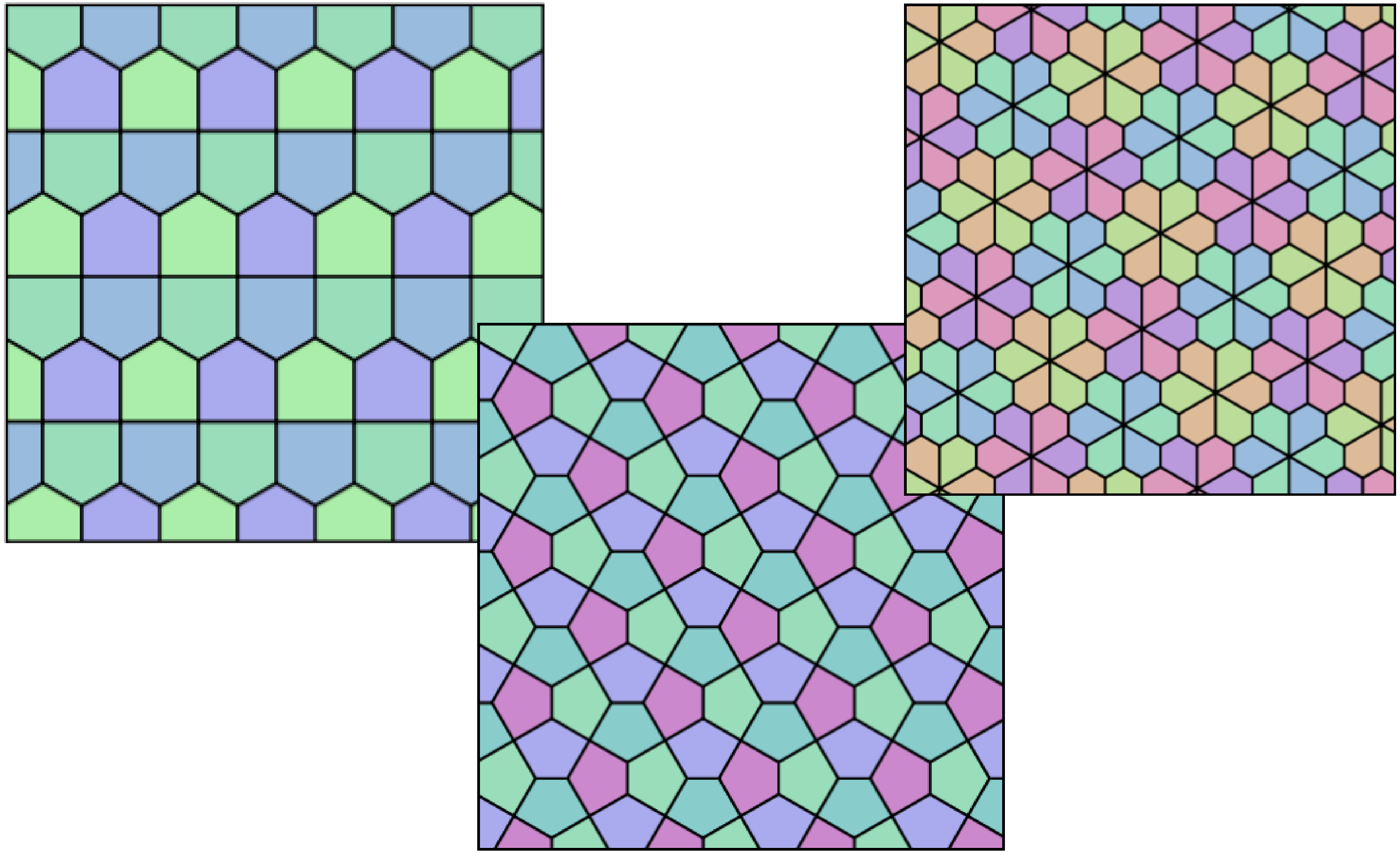
parkiet nieforemny prawidłowy

parkiet nieforemny prawidłowy

Parkietaż nieforemny prawidłowy
Wrocław, ul. Szczytnicka

Parkietaż nieforemny nieprawidłowy
Wrocław, Arkady Wrocławskie

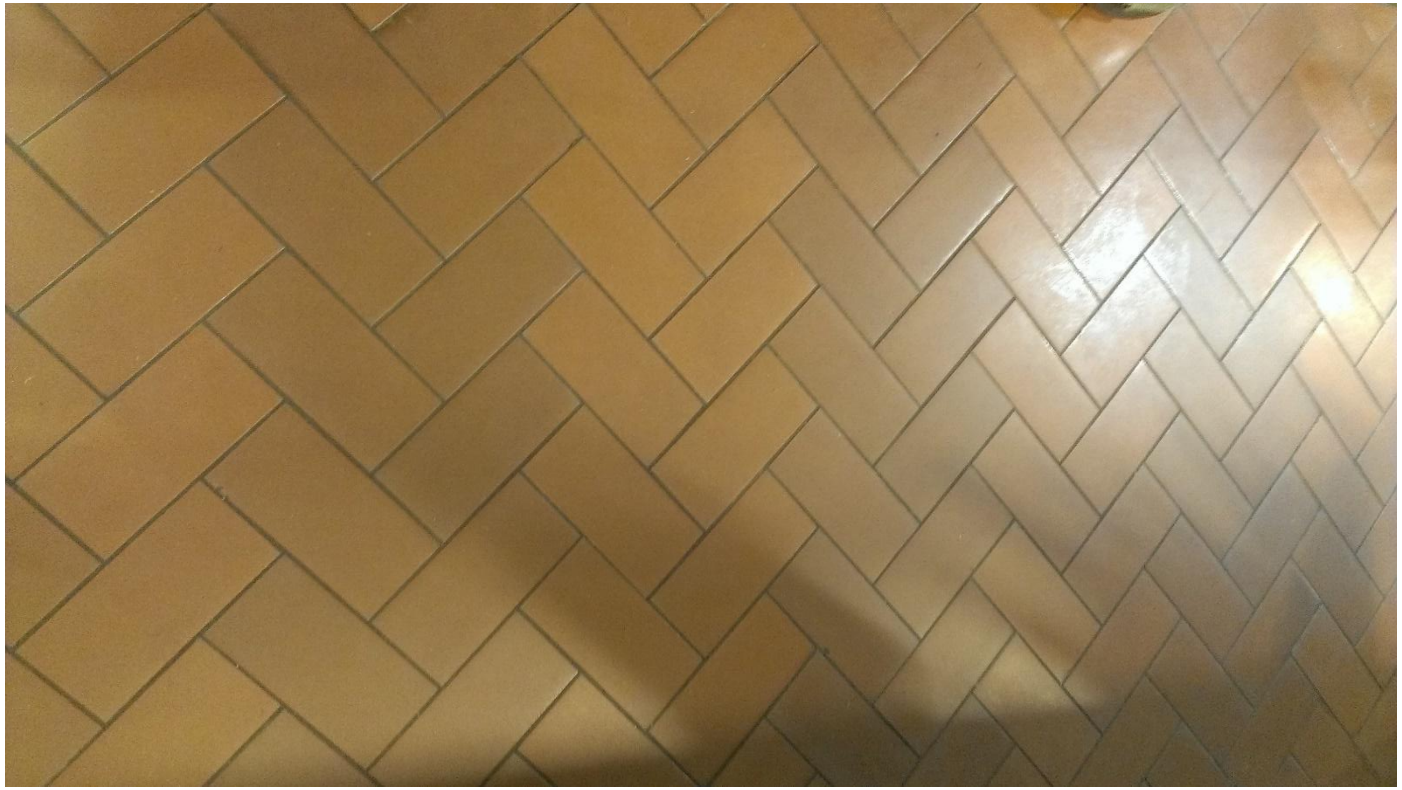
Parkietaże nieforemne prawidłowe



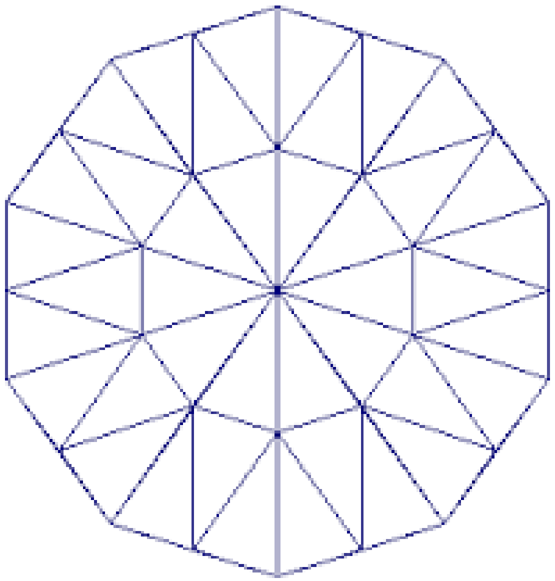
Parkietaż nieforemny nieprawidłowy
Wrocław, ul. Słowiańska

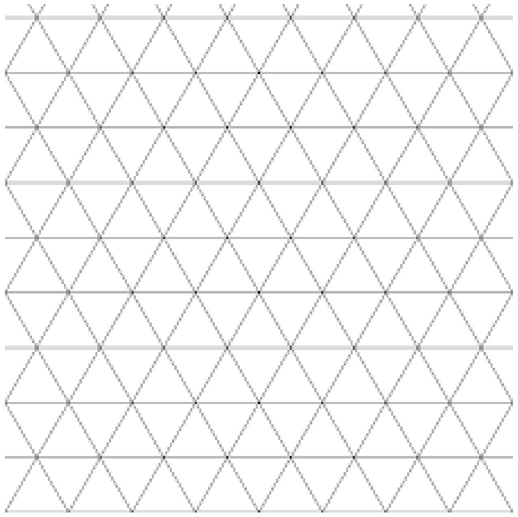
Parkietaż nieforemny nieprawidłowy

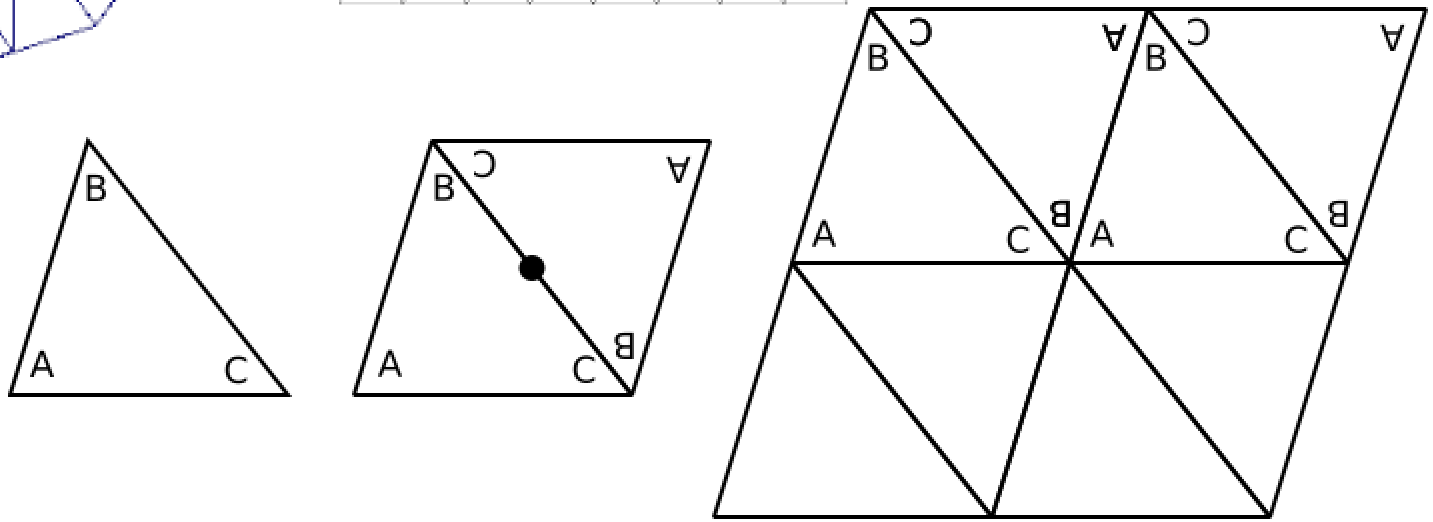
Wrocław, Arkady Wrocławskie, sklep Alma



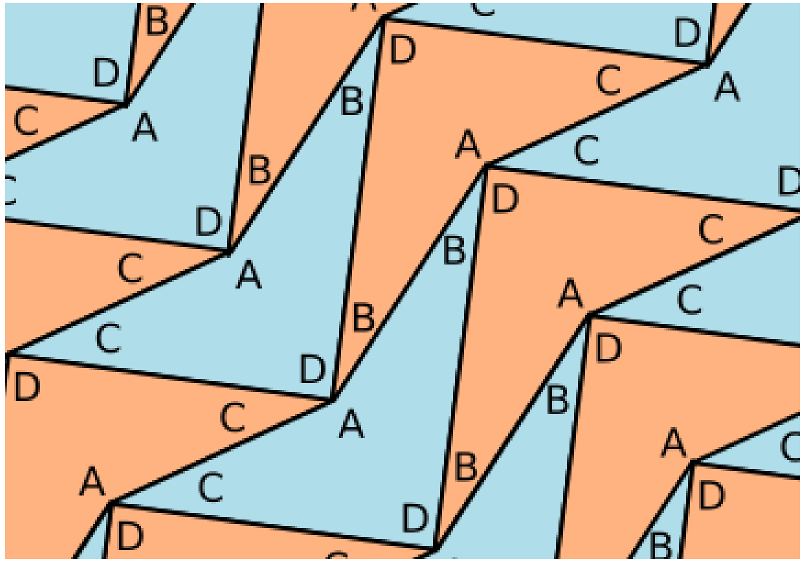
Każdy trójkąt parkietuje płaszczyznę

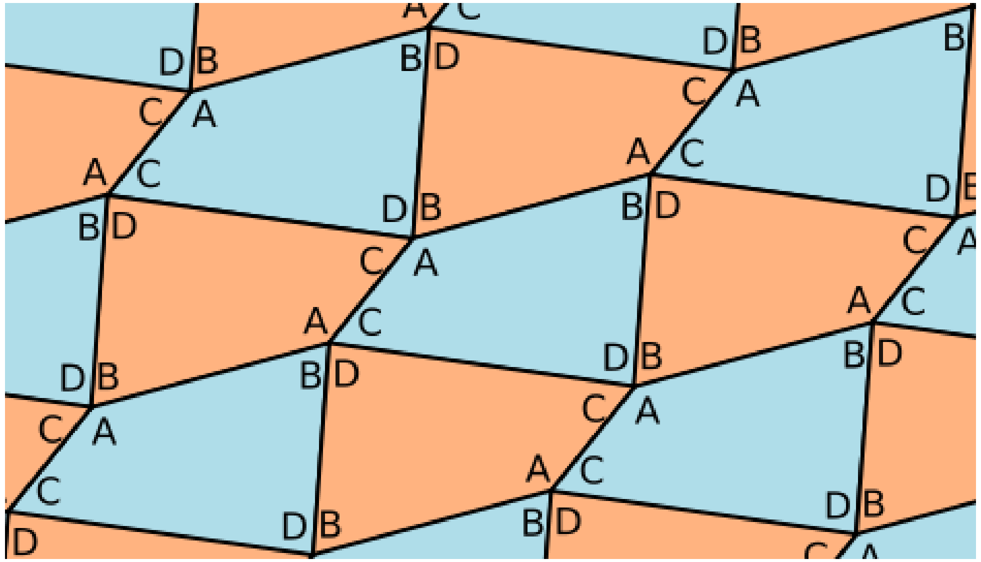




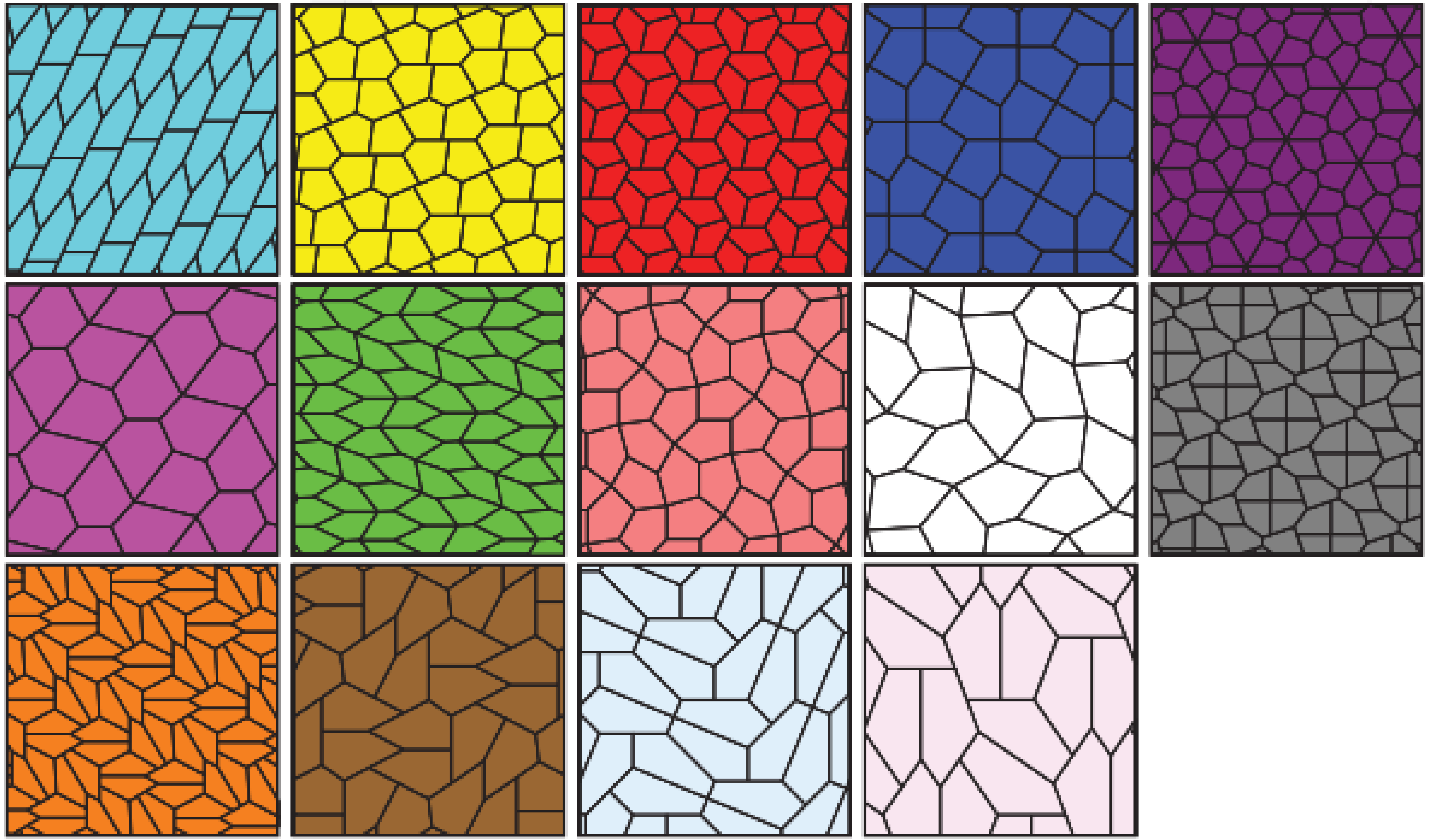


Każdy czworokąt parkietuje płaszczyznę





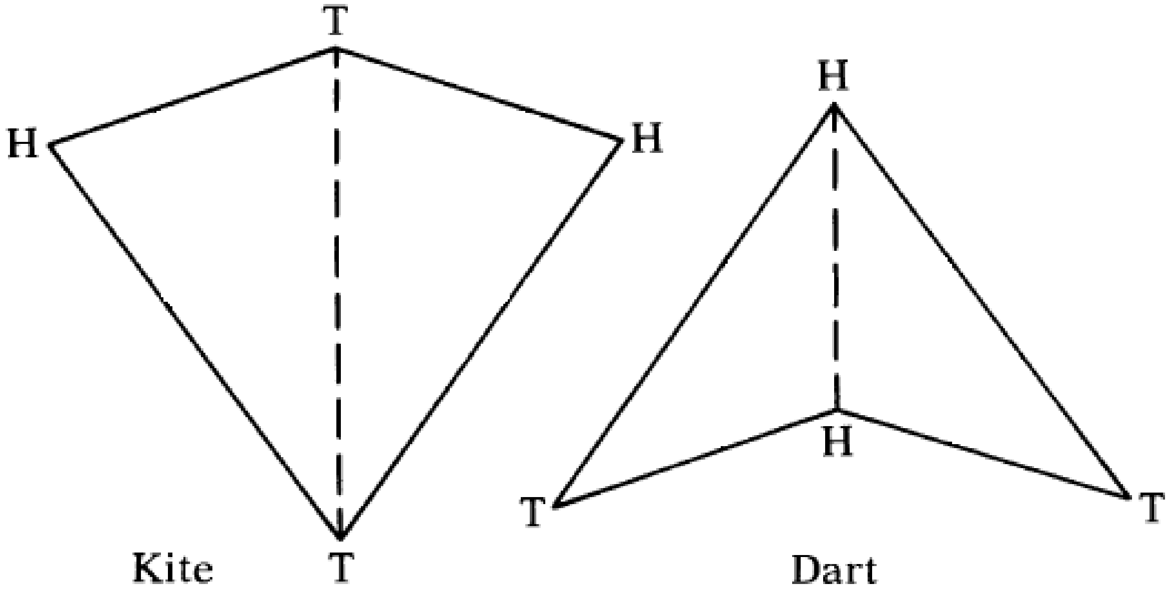
Parkiety jednopłytkowe z pięciokątów wypukłych



Parkietaże acykliczne

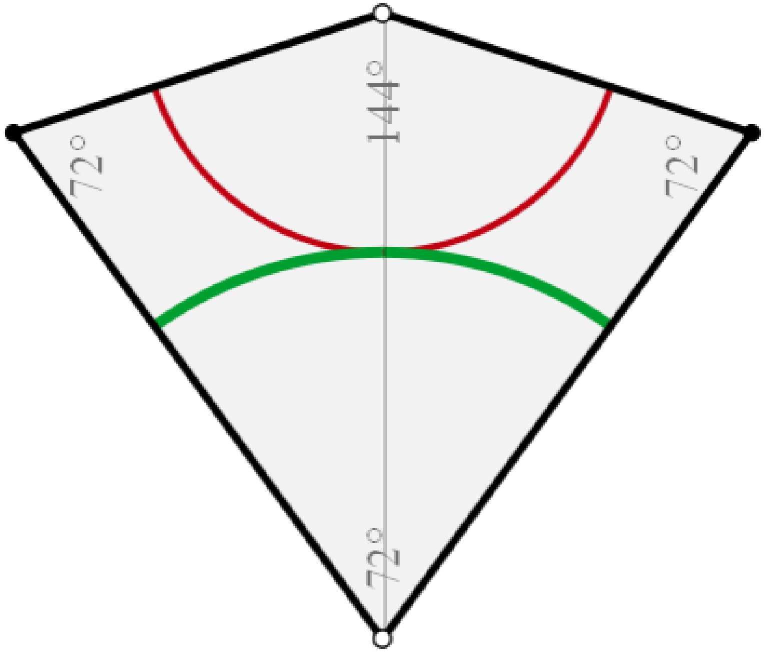
Parkietaż Penrose’a

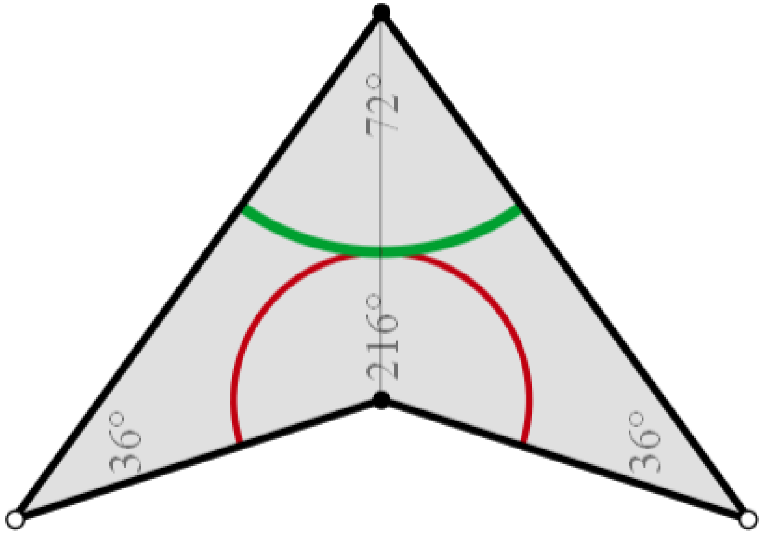
Parkietaż Penrose'a



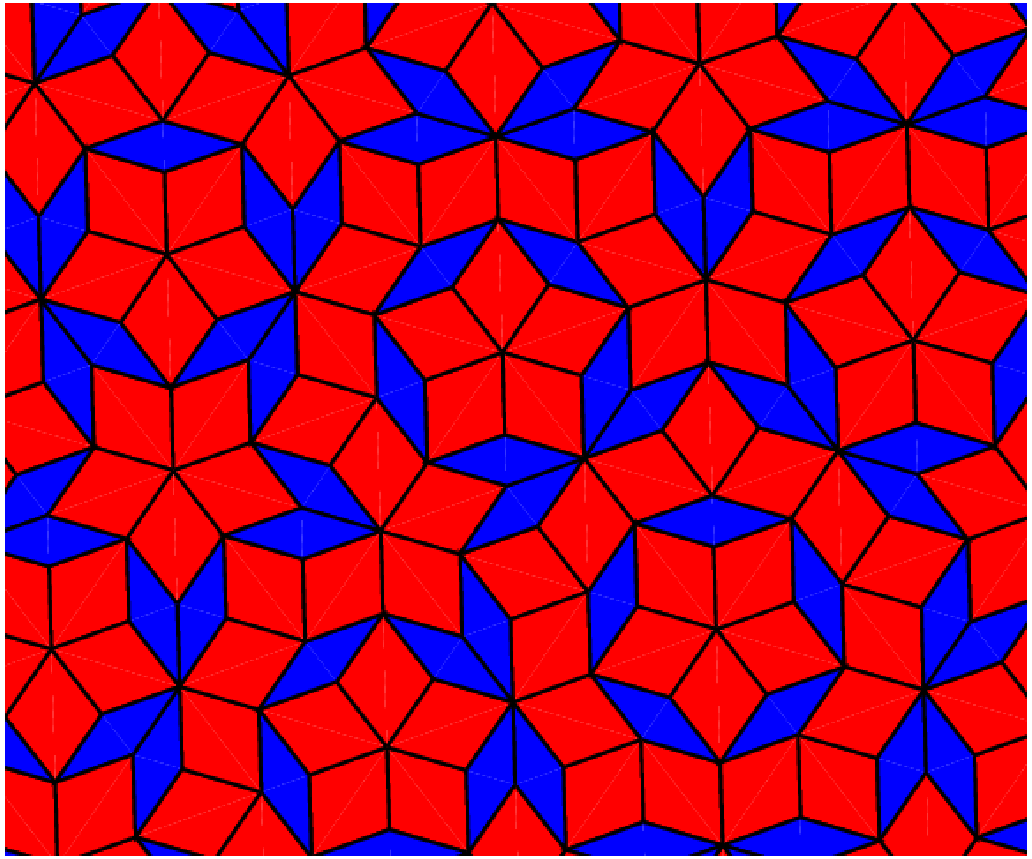
Parkietaż Penrose’a

Jeden romb ("latawiec") ma kąty 72, 72, 72 i 144 stopni,
drugi ma kąty 36, 72, 36 i 216 stopni

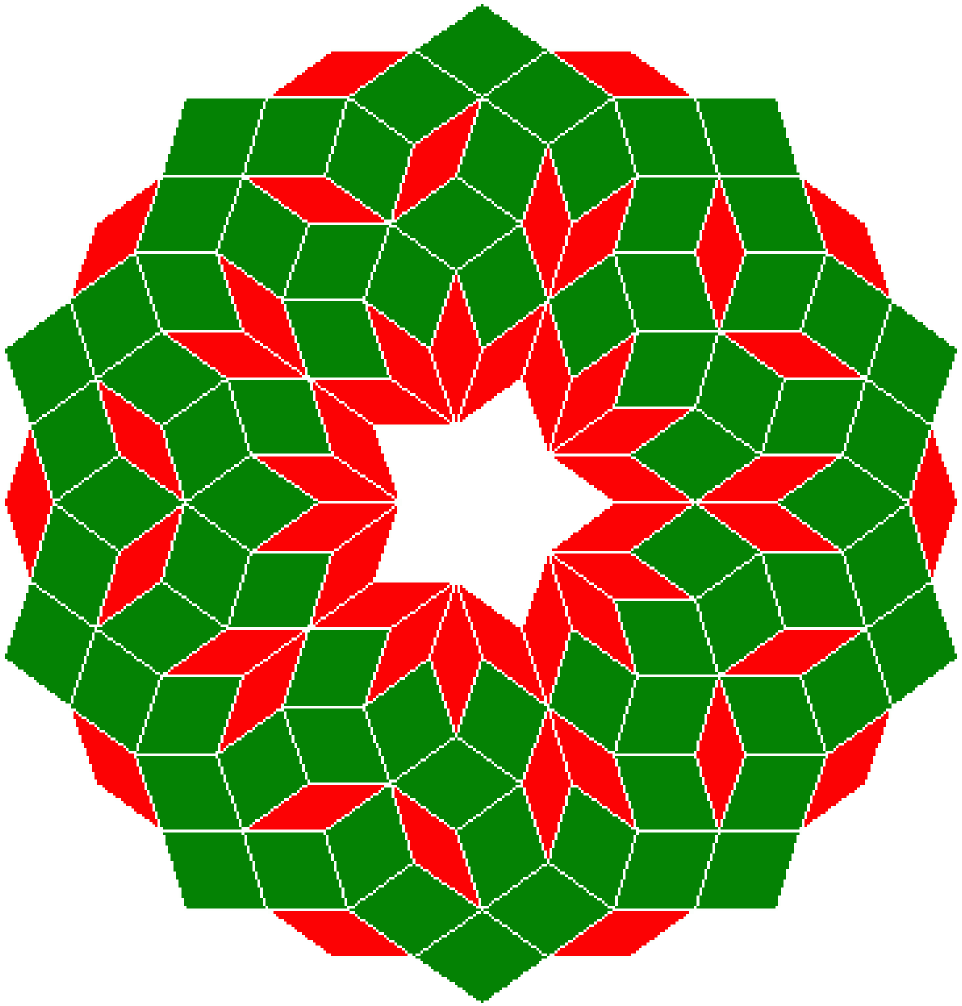




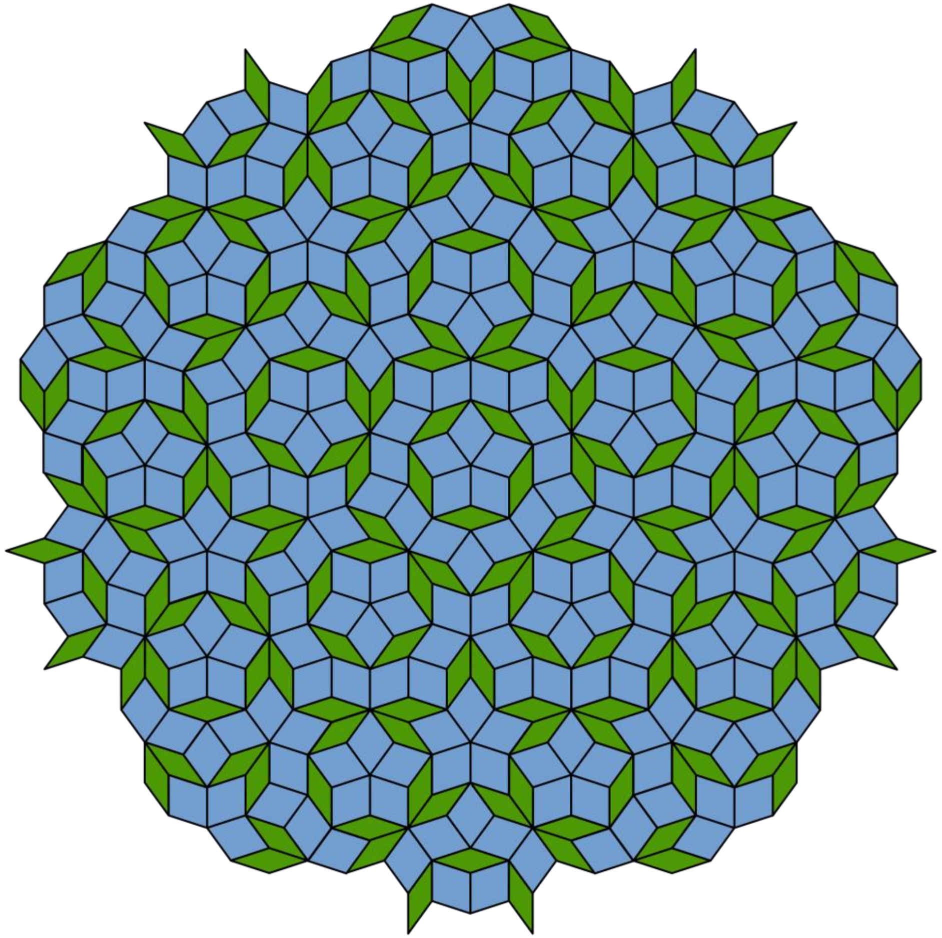
Parkietaż Penrose'a

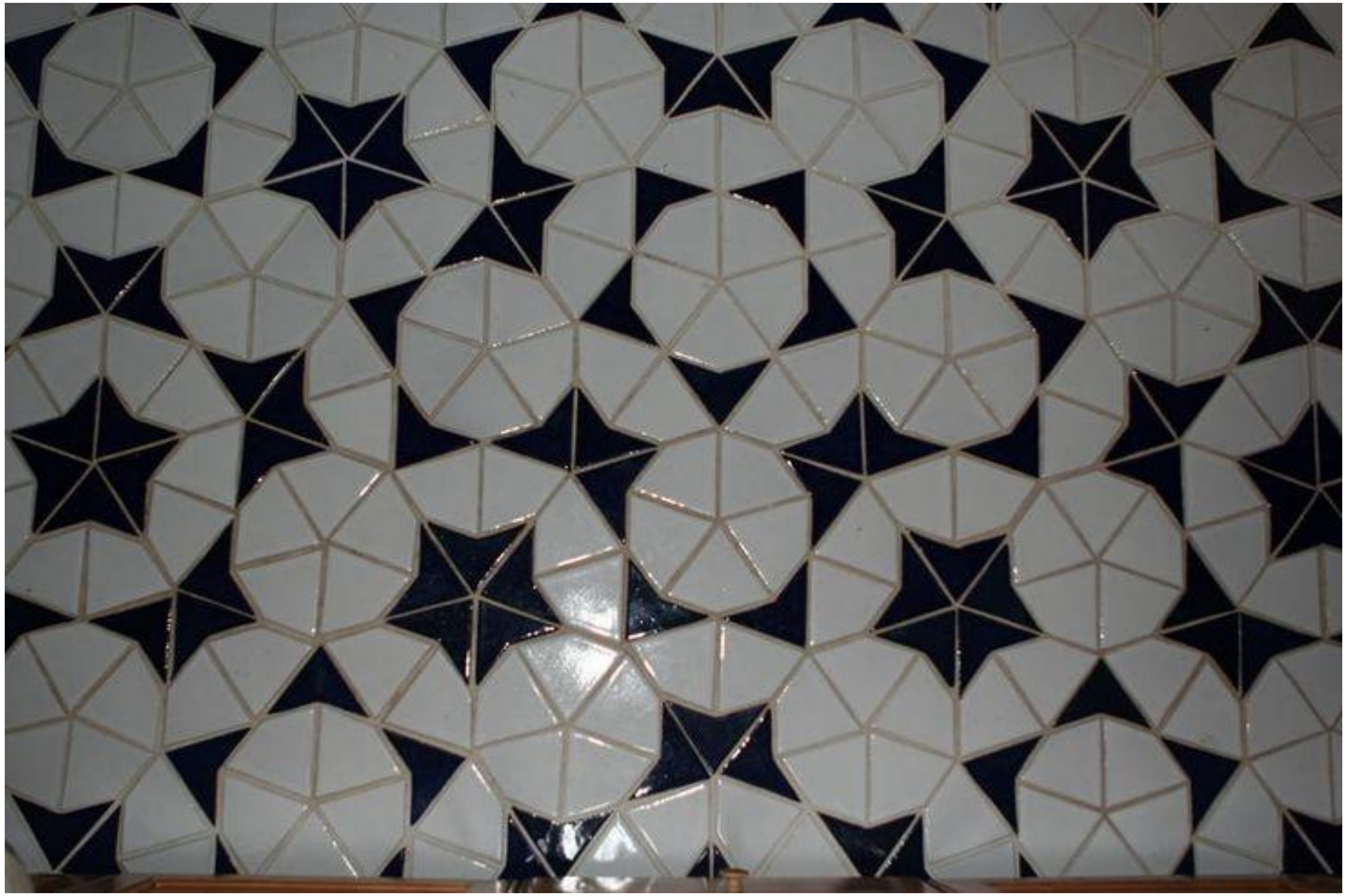


Parkietaż Penrose’a



Parkietaż Penrose’a





Bibliografia:

- Sz. Jeleński *„Śladami Pitagorasa";*
- *http://www.math.edu.pl/bryly-platonskie;*
- *http://www.matematyka.wroc.pl/book/galeria-wielo%C5%9Bcian%C3%B3w-johnsona-%281%29;*
- *http://www.decorimpresja.pl/monte/podstaw/przedmiot_p/matma/parkiet/parkiet03.htm;*
- *http://www.ceo.org.pl/pl/au/news/ile-istnieje-parkietazy-platonskich;*
- *http://prac.im.pwr.wroc.pl/~zak/Coxeter_i_Escher.pdf;*

Bibliografia:

- http://pl.wikipedia.org/wiki/Parkieta%C5%BC_Penrose%27a;
- http://old.csz.pw.edu.pl/files/dla_uczniow/2011_wpopularne_01_budzynski.pdf.

Bibliografia:

- Coxeter H. S. M.: *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*. Warszawa: PWN, 1967;
- Jeleński Szczepan: *Śladami Pitagorasa.* Wyd. VII. Warszawa: WSiP, 1974. Posadzkowanie, s.195-207;
- Krysicki W., Pisarewska H., Świątkowski T.: *Z geometrią za pan brat.* Warszawa: ISKRY, 1992. ISBN 83-207-1227-0;
- Edytorzy Wikipedii, "Parkietaż," *Wikipedia, wolna encyklopedia,* http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Parkieta%C5%BC&oldid=41054104 (dostęp grudzień 7, 2014);
- Wikipedia contributors, "Tessellation," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tessellation&oldid=635935191 (accessed December 7, 2014);
- Wikipedia contributors, "Tiling by regular polygons," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tiling_by_regular_polygons&oldid=635216195 (accessed December 7, 2014);
- Wikipedia contributors, "List of convex uniform tilings," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_convex_uniform_tilings&oldid=636262475 (accessed December 7, 2014);

Bibliografia:

- Edytorzy Wikipedii, "Wielościan półforemny," *Wikipedia, wolna encyklopedia,* //pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Wielo%C5%9Bcian_p%C3%B3%C5%82foremny&oldid=35846862 (dostęp grudzień 7, 2014);
- Piotr Pawlikowski, „Wielościany archimedesowe a platońskie", Wrocławski portal matematyczny, http://www.matematyka.wroc.pl/book/wielo%C5%9Bciany-archimedesowe-plato%C5%84skie (dostęp grudzień 7, 2014);
- Piotr Pawlikowski, „Siatki wielościanów archimedesowych", Wrocławski portal matematyczny, http://www.matematyka.wroc.pl/book/siatki-wielo%C5%9Bcian%C3%B3w-archimedesowych (dostęp grudzień 7, 2014);
- Piotr Pawlikowski, „Matematyka pod stopami (2)", Wrocławski portal matematyczny, http://www.matematyka.wroc.pl/matematykawsztuce/matematyka-pod-stopami-ii (dostęp grudzień 7, 2014);
- Wikipedia contributors, "Penrose tiling," *Wikipedia, The Free Encyclopedia,* http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Penrose_tiling&oldid=633414789 (accessed December 7, 2014).