DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

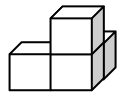
MECZ I

1) Jaka jest największa trzycyfrowa liczba pierwsza, której wszystkie cyfry są różne i też są pierwsze?

2) Ile wynosi iloczyn $99999999998 \cdot 100000000002$?

3) Która z liczb jest większa: ${}^{11111111111111111115}/_{22222222222222222229}$ czy ${}^{33333333333333333335}/_{66666666666666666669}$?

4) Stasiek ma cztery jednakowe sześciany w czterech różnych kolorach: białym, niebieskim, żółtym i czerwonym. Chce z nich skleić bryłę przedstawioną na rysunku. Ile różnie pokolorowanych figur może uzyskać?



5) Czy długości odcinków, na które dzielą się dwie przecinające się cięciwy okręgu mogą wyrażać się czterema kolejnymi liczbami naturalnymi?

6) Trapez $ABCD$ podzielono na części odcinkiem łączącym środki nierównoległych boków. Powstałe w ten sposób figury mają pola równe 9 cm^2 i 4 cm^2. Ile wynoszą pola figur, na które dzieli ten trapez jego przekątna?

7) Suma czterech liczb wynosi 1. Pierwsza z nich jest iloczynem pozostałych, suma pierwszych trzech jest równa czwartej, a pierwszych dwóch – iloczynowi pozostałych. Jakie to liczby?

8) Wyznacz wartość sumy 3+33+333+….+ 333…333, gdzie w ostatnim składniku jest 2015 trójek.

9) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

10) Jaka jest największa liczba naturalna n taka, że 10^n dzieli 1005!?

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II

1) Do 10% roztworu soli kuchennej dosypano 60 dag soli, otrzymując roztwór o stężeniu mniejszym niż 16%. Ile w tym roztworze mogło być soli, a ile wody?

2) Rozłóż liczbę $129^2–1$ na iloczyn liczb pierwszych.

3) Czy istnieje taki ułamek $^{m}/_{n}$, gdzie m i n są naturalne i $m \neq n$, że wszystkie ułamki postaci $\frac{m}{n}, \frac{m+}{n+}, \frac{m+[illegible]}{n+[illegible]}, \frac{m+[illegible]}{n+[illegible]}, \frac{m+[illegible]}{n+[illegible]}, \frac{m+[illegible]}{n+[illegible]}$ są skracalne?

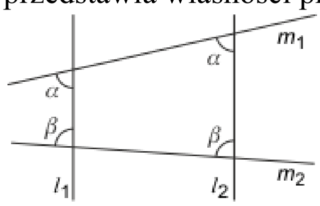
4) Jacek położył na stole 20 fistaszków. Wraz ze swoim tresowanym chomikiem Archimedesem grają w następująca grę: po kolei każdy z nich zjada tyle orzeszków, ile chce, pod warunkiem, że w swoim ruchu każdy zjada co najmniej jeden lecz nigdy więcej niż połowę orzeszków, które są aktualnie na kupce. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Czy Archimedes może sprawić, żeby Jacek zawsze z nim przegrywał?

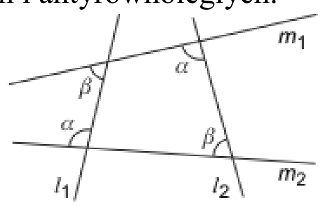
5) Dla jakiej wartości parametru m pierwiastek równania $\frac{x+m}{x+} - \frac{2x-m}{x-}$ =-1 należy do przedziału (-1, 0)?

6) Najdłuższy bok trójkąta ma długość 3, a najkrótszy długość 1. Jakie jest największe możliwe pole tego trójkąta?

7) Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $^{1}/_{a^2} + {}^{1}/_{b^2} = 1$, to $a^4+b^4 \geq (a+b)^2$.

8) Rysunek przedstawia własności prostych równoległych i antyrównoległych.





Udowodnij, że boki trójkąta spodkowego (tzn. odcinki łączące spodki wysokości pewnego trójkąta) są antyrównoległe do boków wyjściowego trójkąta.

9) Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby: $10–3\sqrt{11}$, $8–3\sqrt{7}$, $5–2\sqrt{6}$, $9–4\sqrt{5}$, $7–4\sqrt{3}$.

10) Oblicz objętość i pole powierzchni ośmiościanu foremnego o krawędzi długości 1 cm.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XIV – ROK SZKOLNY 2014/15

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1) Sześć kul bilardowych ponumerowanych liczbami od 1 do 6 ułożono w trójkąt równoboczny. Janek zauważył, że poza bilami w podstawie trójkąta każda inna spełnia warunek, że jej numer jest różnicą numerów bil leżących bezpośrednio pod nią. Jaka bila była w wierzchołku trójkąta?

2) Rozwiąż równanie $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ .+\frac{1}{\sqrt{2x+\ }+\sqrt{2x+\ }}=6$.

3) Dwa koła styczne zewnętrznie są jednocześnie styczne do ramion pewnego kąta. Jaka jest różnica pól tych kół, jeśli odległości ich środków od wierzchołka kąta wynoszą 50 cm i 30 cm?

4) Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich ($a < b < c$) spełniające równanie
$\left(\ +\frac{1}{a}\right)\left(\ +\frac{1}{b}\right)\left(\ +\frac{1}{c}\right)=\ $.

5) Basia i Kasia rozegrały 9 partii szachów, zmieniając w każdej rundzie kolor figur. Żadna gra nie skończyła się remisem. Dokładnie 5 partii wygrała zawodniczka grająca pionkami czarnymi, a Kasia wygrała dokładnie 6 partii. Jakim kolorem figur Kasia rozegrała pierwszą partię?

6) Wykaż, że różnica sześcianów dwóch kolejnych liczb nieparzystych nie może być kwadratem.

7) Linia średnia w trapezie to odcinek łączący środki ramion. W pewnym trapezie równoramiennym linia średnia ma długość 5 i dzieli ten trapez na części, których pola są w stosunku 7:13. Wiadomo, że w ten trapez można wpisać okrąg. Oblicz jego wysokość.

8) Ile cyfr w zapisie dziesiętnym ma liczba cyfr liczby 1996^{1996}?

9) Rozłóż liczbę 1185917 na czynniki pierwsze.

10) Na rysunku poniżej przedstawiono trapez równoramienny, w którym $\alpha = 83^1/_3°$, oraz sposób, w jaki z wielu takich kafelków można zbudować gwiazdę. Z ilu trapezów składa się ta gwiazda?