DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1) Jeśli *S* stanowi 20% *U*, a *U* stanowi 50% *M*, a *M* stanowi 80% *A*, a *SUMA* wynosi 10000, to ile wynosi *S*?

2) Babcia ma więcej niż 50, ale mniej niż 80 lat. Niestety, nie doczekała się syna, ale każda z jej córek ma tyle samo córek co sióstr. Suma liczb córek i wnuczek jest równa wiekowi babci. Ile lat ma babcia i ile ma wnuczek?

3) Dwa wycięte z tektury kwadraty o bokach odpowiednio 4 cm i 3 cm nałożono jeden na drugi w ten sposób, że wierzchołek mniejszego kwadratu pokrył się ze środkiem większego. Jeżeli usuniemy nakładające się części, to ile wynosi pole pozostałego obszaru?

4) Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $[(n+4)/2] + 3n - 2\cdot(-1)^n$ jest podzielna przez 7, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą liczby a.

5) Dany jest pięciokąt foremny *PQRST* (opis wierzchołków podano w kierunku antyzegarowym). Na przekątnej *PR* zbudowano sześciokąt foremny *PRUVWX*. Jaką miarę ma kąt *SRU*?

6) Do ponumerowania stron *Encyklopedii Matematyki Najnowszej* użyto 2017 cyfr, przy czym na kilku pierwszych stronach nie wydrukowano numerów (tzn. numerowanie zaczęto od n-tej strony, którą oznaczono numerem n). Ile co najmniej stron ma ta encyklopedia?

7) Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p i q, spełniające równanie $p^2 - 42q^2 = 1$.

8) Pola tablicy z rysunku należy wypełnić w taki sposób, aby każda wpisana liczba stanowiła średnią arytmetyczną liczb sąsiednich. Ile wynosi *X*?

10			*X*		25

9) Który z równoległoboków wpisanych w dany prostokąt o bokach równoległych do przekątnych tego prostokąta ma największy obwód? Ile on wynosi?

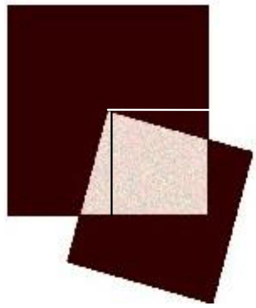
10) W kwadracie *PQRS* łuk *QS* jest ćwiartką okręgu o środku w *P*. Ze środka boku *QR* poprowadzono styczną do tego łuku, która przecięła bok *RS* w punkcie *T*. W jakim stosunku punkt T podzielił ten bok?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Mamy $SUMA = 0{,}2U \cdot 0{,}5M \cdot 0{,}8A \cdot A = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot UMA^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot UA^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5MA^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8A^4 = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 8/10^6 \cdot A^4 = 10^4$. Stąd $10^{10} = 2^{10} \cdot 5^2 \cdot A^4$, czyli $A^4 = 5^8$, zatem A=25, U=20, M=10 i S=2.

2. Niech babcia ma c córek. Każda z nich ma c–1 sióstr i tyleż córek. Zatem wszystkich wnuczek jest $c(c-1)$, a wiek babci to $c + c(c-1) = c(1+c-1) = c^2$. Jedyny kwadrat pomiędzy 50 i 80, to 64. Babcia ma więc 64 lata, 8 córek i 56 wnuczek. Za odpowiedź bez uzasadnienia, że jest jedyna, przyznajemy 5 pkt.

3. Małe trójkąty prostokątne z rysunku (biały i czarny) są przystające z cechy kbk. Mają ten sam kąt w wierzchołku dużego kwadratu (bo kąt biały i kąt czarny uzupełniają ten sam kąt do 90°) i mają kąt prosty oraz jedna przyprostokątna jest połową boku dużego kwadratu. Za stwierdzenie przystawania bez uzasadnienia, odejmujemy 5 pkt. Zatem pole części wspólnej kwadratów stanowi ćwiartkę pola dużego kwadratu. Pole czarne jest sumą pól obu kwadratów pomniejszoną o dwukrotność pola części wspólnej, czyli wynosi $4^2+3^2-2 \cdot 4 = 17$. Za rozwiązanie w położeniu szczególnym (np. boki jednego kwadratu równoległe do boków lub przekątnych drugiego) przyznajemy 1 pkt.



4. Dla n parzystego (=2k) otrzymujemy $[k+2]+6k-2 = 7k$, co dzieli się przez 7. Dla n nieparzystego (=2k+1) otrzymujemy $[k+2{,}5]+6k+3+2 = 7k+2+3+2 = 7k+7$, co także dzieli się przez 7. Za rozumowanie na przykładach przyznajemy 0 pkt.

5. Są 2 możliwe położenia takiego sześciokąta (albo zawiera on Q w swoim wnętrzu, albo nie; innymi słowy opis wierzchołków sześciokąta jest zegarowy albo antyzegarowy). Za rozważenie tylko jednego przypadku przyznajemy 5 pkt. Kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego ma 108°, a sześciokąta – 120°. W trójkącie równoramiennym PRQ kąt R ma 36° zatem kąt PRS ma 108°–36° = 72°. Wobec tego w pierwszym przypadku (Q wewnątrz sześciokąta) kąt SRU ma 120°–72°= 48°, a w drugim (Q na zewnątrz sześciokąta) – 120°+72° = 192°, co jest kątem wklęsłym, więc lepiej podać jego dopełnienie o mierze 168°.

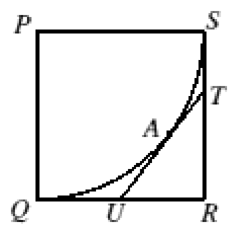
6. Gdyby ponumerowano wszystkie strony, zużyto by 9 cyfr na numery 1-cyfrowe (od 1 do 9), 180 cyfr na numery 2-cyfrowe (od 10 do 99). Do tej pory zużyto by 9+2·90=189 cyfr. Pozostałe numery muszą być 3-cyfrowe i pozostało na nie 2017–189 = 1828 cyfr, ale ta liczba nie dzieli się przez 3. Najmniejsza wielokrotność trójki większa od 1828 to 1830. Oznacza to, że zabrało dwóch cyfr, czyli pierwsze 2 strony musiały być bez numerów. Ponieważ 1830:3 = 610, wszystkich stron encyklopedii jest 9+90+610 = 709. Za każdy błąd koncepcyjny odejmujemy 4 pkt, za błąd rachunkowy 3 pkt.

7. Jeśli p jest parzyste, otrzymujemy sprzeczność – różnica liczb parzystych nie może być nieparzysta. W przeciwnym razie mamy $p^2-1 = 42q^2$, czyli $(p-1)(p+1) = 6 \cdot 7q^2$, gdzie oba czynniki po lewej są parzyste, zatem prawa musi dzielić się przez 4, skąd q musi być parzyste. Dla q=2 mamy $p^2 = 168+1=169$, czyli p=13. Za podanie rozwiązania (13, 2) bez uzasadnienia, że jest jedyne, przyznajemy 2 pkt.

8. Średnia arytmetyczna dwóch liczb wypada na osi w środku pomiędzy tymi liczbami. Nazwijmy brakujące liczby kolejno A, B i C. Liczba C musi być równoodległa od X i 25, ponadto $|BX| = |CX|$ oraz $|BX| = |BA|$, natomiast A musi być równoodległa od B i 10. Wynika z tego, że wszystkie odstępy między kolejnymi liczbami muszą być równe. Odcinek od 10 do 25 jest więc szukanymi liczbami podzielony na 5 jednakowych odcinków każdy o długości (25–10)/2 = 3 i taki jest odstęp między kolejnymi liczbami, zatem A=13, B=16 i X=19.

9. Niech przekątna prostokąta ma długość d. Rozważmy trójkąt prostokątny będący połową prostokąta uzyskaną po przecięciu go jedną z przekątnych. Prowadząc bok równoległoboku równolegle do przekątnej, odcinamy od tego trójkąta trójkąt do niego podobny w skali k (<1). Jeśli rozważymy teraz analogiczny trójkąt powstały z przecięcia prostokąta drugą przekątną, to tam sytuacja jest taka sama, tylko skala podobieństwa wynosi (1–k), bo boki trójkątów sumują się do całego boku prostokąta. Zatem bok równoległoboku równoległy do jednej przekątnej ma długość kd, a do drugiej $(k-1)d$. Stąd obwód wszystkich równoległoboków wpisanych w prostokąt jest stały, bo zależy tylko od długości przekątnej tego prostokąta. Wynosi on $2kd + 2(1-k)d = 2d$. Za poprawne, ale bardziej skomplikowane rozumowanie odejmujemy 2 pkt.

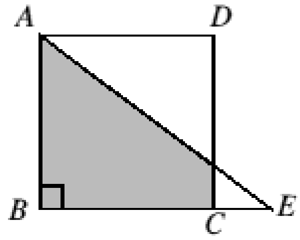
10. Niech U jest środkiem QR, A – punktem styczności, a $|RT|=x$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $|QR|=2$. Wtedy $|QU|=1$. Kąt z wpisanym okręgiem jest figurą osiowosymetryczną, zatem odcinki od jego wierzchołka do punktów styczności są przystające. Zatem $|QU|=|UA|$ = 1 i $|AT|=|TS| = 2-x$. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie URT mamy: $1+x^2 = (1+2-x)^2$, czyli $8-6x = 0$, skąd $x=4/3$. Oznacza to, że punkt T dzieli bok SR w stosunku 2/3 : 4/3 = 2:4 = 1:2, licząc od S (lub 2:1, licząc od R).



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ II



1. Kwadrat *ABCD* z rysunku ma bok długości 3, a odcinek *BE* – 4. Jakie jest pole zacieniowanej figury?

2. Ile wynosi reszta z dzielenia przez 11 liczby 9876543210987654321999888777666555444333222111000?

3. Obwód koła o promieniu 1 podzielono na 4 równe części, a następnie dwie niesąsiednie części przesunięto równolegle, zamieniając ich końce miejscami. Jakie jest pole figury ograniczonej tymi czterema łukami?

4. Suma każdych trzech kolejnych spośród 2017 liczb zapisanych w rzędzie jest równa 100. Wyznacz wszystkie te liczby, jeśli pierwsza z nich jest równa 11, a przedostatnia 12.

5. Ustawiamy liczby całkowite w następujący ciąg: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, … Jaka liczba stoi na *n*-tym miejscu? Podaj jej wzór algebraiczny.

6. Ze Zwardonia do odległej o 15 km Milówki wyruszył pieszo turysta. Godzinę później z Milówki do Zwardonia wyjechał samochód, który minął turystę po 15 minutach jazdy. Po półgodzinnym postoju w Zwardoniu kierowca ruszył w drogę powrotną. Po raz kolejny minął turystę zmierzającego do Milówki po 50 minutach od ich ostatniego spotkania. Ile czasu zajęła turyście droga ze Zwardonia do Milówki, jeśli szedł cały czas w tym samym tempie, a kierowca w obie strony jechał z tą samą szybkością.

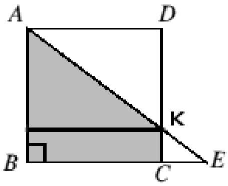
7. Poparcie dla rządu wśród studentów matematyki na AFS (Akademii Futurologii Stosowanej) po pierwszym czytaniu w Sejmie ustawy o opłatach za studia zmalało o 25%, a kiedy ustawa została już przegłosowana – o kolejne 20%, ale po zakończeniu prac nad nią przez Senat wzrosło o $2\,{}^{2}/_{3}$ punktu procentowego. Ile co najmniej osób studiuje matematykę na AFS?

8. Przekątna sześcianu jest o 5 dłuższa od jego krawędzi. Jakie jest pole powierzchni tego sześcianu?

9. W jakiej odległości od rosochatej wierzby uderzył piorun, jeśli stojący pod nią w czasie burzy pan Nieroztropek usłyszał grzmot po 10 sekundach od błyskawicy?

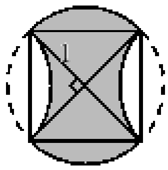
10. Ile jest liczb 10-cyfrowych składających się z 10 różnych cyfr, mających taką własność, że liczba utworzona z pierwszych *n* cyfr dzieli się przez *n*, dla $n \in \{1, \ldots, 10\}$?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ



1. Trójkąty ABE i KCE są podobne i $|CK|/|CE| = |BA|/|BE|$. Zatem $|CK|= ¾$. Trapez $ABCK$ jest sumą prostokąta o wymiarach ¾ na 3 i połowy prostokąta o wymiarach 2¼ na 3, zatem jego pole wynosi $5\ ^3/_8$.

2. Reszta z dzielenia liczby przez jedenaście w systemie dziesiętnym jest taka sama jak reszta z dzielenia przez 11 jej naprzemiennej sumy cyfr, zaczynając sumowanie ze znakiem plus od cyfry jedności. Uczeń może skorzystać z cechy podzielności bez dowodu, ale za jej niepoprawne sformułowanie odejmujemy 2 pkt. Cyfry występujące trzykrotnie wniosą do naprzemiennej sumy wartości 0–1+2–3+…+8–9, co zredukuje się z kolejnymi 10 składnikami. Pozostanie zatem suma 1–2+3–4+5–6+7–8+9 = 10–10+10–10+5, co daje resztę 5 z dzielenia przez 11. Za prowadzenie bardziej skomplikowanych rachunków odejmujemy 2 pkt.



3. Pole figury jest równe polu kwadratu o wierzchołkach w miejscach podziału łuku. Ten kwadrat ma przekątną równą średnicy okręgu, więc jego bok jest równy $\sqrt{2}$, zatem pole jest równe **2**.

4. Mamy ciąg liczb 11, a, b, c, d, e,…., w którym $11+a+b=100$, więc $a+b=89$. I dalej $a+b+c=100$, więc $c=11$. Skoro $b+11+d=100$, to $b+d=89$. Stąd $d=a$ i $e=b$. Zatem w ciągu są tylko trzy liczby, które się okresowo powtarzają. Ponieważ 2016 jest wielokrotnością 3, liczba na miejscu 2016. Jest taka sama jak b, czyli $b=12$ i $a=77$. Ciąg wygląda więc tak 11, 77, 12 (ta grupa liczb powtarza się 672 razy) i na końcu stoi 11.

5. Na miejscach nieparzystych stoją liczby ujemne, a na parzystych dodatnie. Na n-tym miejscu stoi liczba $(-1)^n\cdot[^n/_2]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Jeśli uczeń poda wzór „z wąsem" opisujący osobno przypadki parzystych i nieparzystych n, przyznajemy 6 pkt.

6. Niech x oznacza drogę pokonaną przez turystę w ciągu 1¼ godziny. Wtedy prędkość turysty wynosi $^4/_5x$. Kierowca w 15 min przejechał drogę $15–x$, więc miał prędkość $60–4x$. W ciągu 50 min turysta przeszedł $^5/_6\cdot{}^4/_5x = {}^2/_3x$ km. Natomiast kierowca, jadąc przez 20 min, pokonał drogę $x+x+{}^2/_3x = {}^8/_3x$ km. Ta sama droga wyliczona jako iloczyn prędkości i czasu wynosi $(60–4x)\cdot{}^1/_3 = 20–{}^4/_3x$. Porównując te dwie liczby, otrzymujemy $20–{}^4/_3x = {}^8/_3x$, czyli $20=4x$, skąd $x=5$. Turysta poruszał się więc z prędkością 4 km/h, a przejście 15 km zajęło mu 3¾ godz. Za poprawne lecz dłuższe rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

7. Niech będzie n studentów, z czego p popiera na początku ustawę. Po pierwszym spadku ustawę popiera $^3/_4p$, a po drugim $^4/_5\cdot{}^3/_4p = {}^3/_5p$ studentów (widać, że liczba p musi się dzielić przez 4 i 5, czyli przez 20). W tym momencie poparcie dla ustawy wynosi $^{0,6p}/_n\cdot 100$ procent. Ta wielkość ma wzrosnąć o $2^2/_3$. Wówczas liczba studentów popierających ustawę wyniesie $[^{0,6p}/_n\cdot 100 + \text{o } 2^2/_3]/100 \cdot n = 0,6p + {}^2/_{75}n$ i to ma być liczba całkowita. Ponieważ p dzieli się przez 20, wystarczy jeśli n będzie dzieliło się przez 75. Stąd najmniejsze n to 75, a liczba popierających na początku może wynosić 20, 40 lub 60 (np. dla $p=20$ najpierw poparcie spada najpierw do 15 osób, potem do 12, a na koniec rośnie do 14). Za rozwiązanie, w którym zakłada się, że na początku wszyscy popierają ustawę, przyznajemy 3 pkt. To radyklanie upraszcza rozwiązanie, ale minimalna liczba studentów wychodzi wtedy 300, co wcale nie jest najmniejszą możliwą liczbą.

8. Niech krawędź sześcianu ma długość a. Wtedy z twierdzenia Pitagorasa przekątna sześcianu ma długość $a\sqrt{3}$ i mamy $3a^2 = (a+5)^2 = a^2+10a+25$. Stąd $2a^2–10a–25 = 0$ i dalej $a^2–5a–{}^{25}/_2 = 0$ czyli $a^2–2\cdot 2,5a+{}^{25}/_4 = {}^{75}/_4$, co daje $(a–2,5)^2 = {}^{75}/_4$. Stąd $a–2,5 = {}^{5\sqrt{3}}/_2$ i ostatecznie $a = {}^{5\sqrt{3}}/_2+2,5$. Uczeń może zastosować wzór na pierwiastki równania kwadratowego, jeśli zna, ale musi wybrać ten właściwy i uzasadnić wybór. Powierzchnia sześcianu wynosi $6a^2 = 6({}^{5\sqrt{3}}/_2+2,5)^2 = 112,5 + 75\sqrt{3} + 37,5 = 150+75\sqrt{3}$.

9. Wyładowanie i grzmot nastąpiły w tym samym momencie. Ponieważ prędkość światła jest ogromna, można założyć, że Nieroztropek zobaczył błysk w tej samej chwili, kiedy on nastąpił, podczas gdy dźwięk biegł do niego przez 10 s. Odległość od burzy w metrach można więc obliczyć, mnożąc czas w sekundach przez prędkość dźwięku w powietrzu wyrażoną w m/s. Za taką odpowiedź (bez konkretnych wartości) przyznajemy 5 pkt. Jeśli uczeń poda sensowną wielkość prędkości dźwięku (między 300 a 350 m/s), przyznajemy kolejne 3 pkt. Każda z tych wielkości jest możliwa, bo prędkość dźwięku w powietrzu zależy od temperatury, ale za to nie odejmujemy punktów. Zatem sensowna odpowiedź to ok. 3000-3500 m, czyli 3-3,5 km. Ostatnie 2 pkt przyznajemy za sprawdzenie, że założenie o natychmiastowym spostrzeżeniu błyskawicy było sensowne. Prędkość światła w powietrzu to trochę mniej niż 300 mln m/s, zatem odległość 3000 m światło pokona w czasie 1/100000 sekundy – to jest czas niezauważalny.

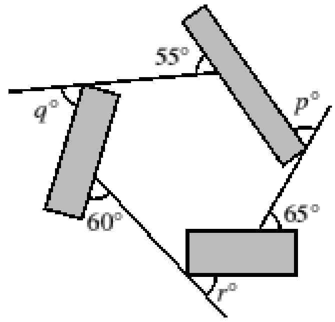
10. Warunki zadania spełnia jako jedyna liczba **3816547290**. Jej dziesiątą cyfrą musi być 0 (bo dzieli się przez 10). Suma cyfr 1+2+…+9 = 45 i jest podzielna przez 9, więc zawsze uda się uzyskać podzielność przez 9. Na miejscach parzystych (licząc od lewej) muszą stać cyfry parzyste, więc na miejscach o numerach nieparzystych – cyfry nieparzyste, przy czym na V miejscu musi stać 5. Na miejscy IV może być tylko 2 lub 6 (bo cyfrę tę poprzedza cyfra nieparzysta, a tylko z taką końcówką liczba będzie podzielna przez 4). Na VIII miejscu też może być tylko 2 lub 6 (z tych samych powodów), przy czym jeśli będzie to 2, to musi być poprzedzone przez 3 lub 7 (bo tylko takie trzycyfrowe końcówki z cyfrą parzystą na początku dzielą się przez 8), a jeśli będzie to 6, to musi być poprzedzone przez 1 lub 9. Wobec tego na miejscu II i VI może być tylko 4 lub 8 (związane z 2 i 6 na miejscu IV, tzn. 2 występuje z 4, a 6 z 8). Sprawdźmy więc 2 przypadki: a) gdy na II miejscu jest 4 i b) gdy na II miejscu jest 8. W a) po bokach 4 musi być 1 i 7 (w dowolnej kolejności), aby uzyskać podzielność przez 3. Wtedy na siedmiu początkowych miejscach mamy 1472589 (bo na VIII miejscu musi być 6 więc przed nim 9) albo 7412589, ale żadna z nich nie dzieli się przez 7. Zatem zachodzi b). Na II miejscu stoi 8, a obok (1 lub 7) z (3 lub 9) w dowolnej kolejności. Musimy zatem sprawdzić takie liczby: 1836547, 3816547, 1896547, 9816547, 1896543, 9816543, 7896543, 9876543. Podzielność przez 7 daje tylko 3816547, więc taki musi być początek liczby. Pozostała cyfra 2 na miejsce VIII i cyfra IX na miejsce 9. Wykonaliśmy 8 bezpośrednich sprawdzeń. Za rozwiązanie, w którym jest ich istotnie więcej odejmujemy co najmniej 2 punkty. Za podanie wyniku bez uzasadnienia jego jedyności przyznajemy 4 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁÓWA

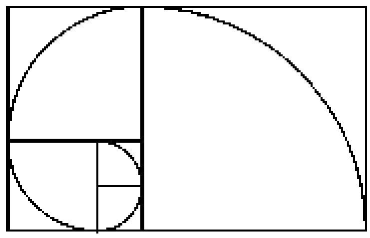
MECZ III

1. Rysunek przedstawia pewną konfigurację prostokątów i odcinków. Ile wynosi suma p, q i r?



2. Szyna kolejowa przy peronie 9¾ na *Kings Cross Station* wykazywała przez 100 kolejnych dni zadziwiającą własność (zwaną rozszerzalnością termiczną metali): w nocy kurczyła się o 1%, a w dzień o 1% wydłużała. Czy po takich 100 cyklach kurczenia i wydłużania szyna była dłuższa czy krótsza niż przed podjęciem obserwacji?

3. Mozaika z rysunku składa się z 5 kwadratowych kafelków. Na każdym jest zaznaczony ornament w kształcie ćwierci okręgu. Najmniejsze dwa kwadraty mają bok długości 1. Do mozaiki dołożono w analogiczny sposób 5 kolejnych kafelków. Jaką długość ma uzyskana w ten sposób spirala?



4. Z miejscowości A i B oddalonych o 182 km wyjechali dwaj rowerzyści, jeden naprzeciw drugiemu. Rowerzysta jadący z B do A jechał ze średnią prędkością mniejszą od 25 km/h. Rowerzysta jadący z A do B wyjechał godzinę wcześniej i jechał ze średnią prędkością o 7 km/h większą od średniej prędkości kolegi. Spotkali się w takim miejscu, że rowerzysta jadący z A przebył już 9/13 drogi. Z jakimi średnimi prędkościami poruszali się rowerzyści?

5. Małgosia ma teraz 3 razy tyle lat, ile Jaś miał wtedy, gdy Małgosia miała tyle, ile Jaś ma teraz. Kiedy Jaś będzie miał tyle lat, ile ma ich teraz Małgosia, razem będą mieli 28 lat. Ile lat ma obecnie każde z nich?

6. Wykaż, że pole prostokąta o bokach równoległych do przekątnych kwadratu, w którym znajduje się ten prostokąt, jest nie większe od połowy pola tego kwadratu.

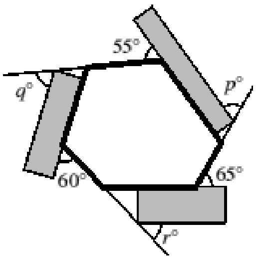
7. Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{89}$, a krawędzie jego podstawy – 3 i 4. Ile wynosi pole powierzchni tego prostopadłościanu?

8. W pudełku jest 13 kulek białych i 14 czarnych. Wybieramy losowo 2 kulki. Jeśli mają ten sam kolor, wrzucamy na ich miejsce kulkę czarną, a jeśli różne kolory – wrzucamy białą. Powtarzamy to do momentu, aż w pudełku zostanie jedna kulka (i nie da się wykonać kolejnego ruchu). Jakiego będzie koloru?

9. Czy istnieją trzy różne liczby całkowite dodatnie, których suma, a także suma każdej pary tych liczb jest kwadratem liczby naturalnej i trzy z tych liczb są kolejnymi kwadratami?

10. Aby pomnożyć liczbę 157894736842105263 przez 2 wystarczy ostatnią cyfrę przenieść na początek. Jaka jest najmniejsza liczba naturalna kończącą się cyfrą 4 taka, że aby pomnożyć tę liczbę przez 4, wystarczy przenieść ostatnią cyfrę na początek?

EDYCJA XVI – ROK SZKOLNY 2016/17
GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ



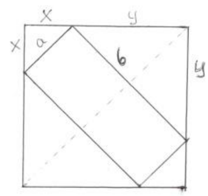
1. Na bazie układu prostokątów można narysować sześciokąt o katach zewnętrznych jak w treści zadania (za to przejście przyznajemy 3 pkt). Suma kątów zewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego wynosi 360° (za podanie tego faktu bez uzasadnienia odejmujemy 4 pkt). Zatem r+60+q+55+p+65=360. Stąd r+p+q = 180.

2. Długość szyny będzie stawała się coraz krótsza, bo wartości, o które szyna skraca się w nocy, są zawsze większe od tych, o które wzrasta w ciągu dnia (1% z liczby większej jest większy niż 1% z liczby mniejszej). Za bardziej skomplikowane rozwiązanie, np. za obliczenie końcowej długości szyny (= $1{,}01^{100}\cdot 0{,}99^{100}$ = 0,9900493387 długości początkowej) odejmujemy 2 pkt.

3. Długość boku każdego kolejnego kwadratu (czyli promienie ćwierci okręgów) jest sumą długości boków dwóch poprzednich kwadratów, stąd kolejne długości wynoszą 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Długość ćwierćokręgu o promieniu r to $^{\pi r}/_{2}$, więc długość spirali wynosi $^{\pi}/_{2}$(1+1+2+3+5+8+13+21+34+55) = $^{143}/_{2}\pi$ = 71,5π.

4. Do chwili spotkania szybszy rowerzysta przebył $^{9}/_{13}\cdot 182$ = 126 km, a wolniejszy 182–126=56 km. Niech prędkość szybszego rowerzysty wynosi v, a czas jego jazdy do chwili spotkania t. Mamy układ równań: vt=126 (skąd $v=^{126}/t$) oraz (v–7)(t–1)=56. Po podstawieniu za v dostajemy $77-7t-^{126}/_{t} = 0$ lub równoważnie $t^2-11t+18=0$. Przekształcając, mamy $t^2-2\cdot 5{,}5t+30{,}25 = 12{,}25$, czyli $(t-5{,}5)^2 = 3{,}5^2$. Zatem t–5,5 = 3,5 lub t–5,5 = -3,5. Stąd t=9 lub t=2, czyli v=14 lub v=63 (co odrzucamy, za podanie obu odpowiedzi odejmujemy 4 pkt). Uczeń może zastosować wzór na pierwiastki równania kwadratowego, jeśli zna. Zatem jeden jechał ze średnią prędkością 14 km/h, a drugi 7 km/h.

5. Niech x to obecny wiek Małgosi, a y – obecny wiek Jasia. Lat temu x–y Jaś miał y–(x–y) = 2y–x lat i zachodzi warunek x = 3(2y–x), czyli $x=^{3}/_{2}y$. Natomiast za x–y lat Jaś będzie miał lat x, a Małgosia x+x–y = 2x–y i zajdzie warunek x+2x–y = 28, czyli 3x–y =28. Podstawiając za x, otrzymujemy $^{9}/_{2}y-y$ = 28, skąd y=8 i x=12. Za podanie odpowiedzi bez uzasadnienia, że jest jedyna przyznajemy 3 pkt.



6. Aby zmaksymalizować pole prostokąta zawartego w kwadracie, należy ułożyć go symetrycznie względem środka kwadratu, z wierzchołkami na brzegu kwadratu (za brak wysłowienia tej własności odejmujemy 2 pkt). Z podobieństwa trójkątów prostokątnych mamy $c\sqrt{2}:b = c:y$ (skąd $b = \sqrt{2}y$) oraz $c\sqrt{2}:a = c:(c-y)$ skąd $a = \sqrt{2}(c-y)$. Stad pole prostokąta ab = 2y(c–y), przy czym y zmienia się od 0 do c. Funkcja opisująca pole jest parabolą z miejscami zerowymi w 0 i c oraz ramionami skierowanymi w dół. Z symetrii największą wartość przyjmuje pośrodku między miejscami zerowymi, czyli dla $y=^{c}/_{2}$. Wtedy prostokąt jest kwadratem o polu $c^2/2$. Uczeń może zauważyć, że obwody rozważanych prostokątów są jednakowe i skorzystać z własności izoperymetrycznej, że ze wszystkich prostokątów o stałym obwodzie największe pole ma kwadrat, ale powinien umieć tę własność uzasadnić (np. tak jak powyżej). Jeśli tego nie zrobi, odejmujemy 3 pkt.

7. Przekątna podstawy prostopadłościanu ma długość 5 (trójkąt egipski), a z twierdzenia Pitagorasa wysokość prostopadłościanu wynosi 8 (25+64=89). Stąd pole powierzchni prostopadłościanu wynosi $2\cdot(3\cdot 4+3\cdot 8+4\cdot 8)$ = 136.

8. Niezależnie od dokonanego wyboru nie zmienia się parzystość liczby kul białych. Ich liczba zawsze musi być nieparzysta, wobec tego nigdy nie wyniesie 0. Skoro na koniec zostaje 1 kula, to musi być ona biała. Za ogólne ale bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt. Za rozważanie różnych przykładowych rozgrywek przy podaniu poprawnej odpowiedzi przyznajemy do 5 pkt (w zależności od stopnia wyczerpania możliwości) lub 0 pkt przy odpowiedzi niepoprawnej.

9. Takie liczby istnieją. W rozwiązaniu wystarczy podać jeden przykład, opisując drogę dojścia do tego wyniku. Np. dla liczb 41, 80, 320 mamy 41+80+320 = 441 = 21^2, 80+320 = 400 = 20^2, 41+320 = 361 = 19^2, 41+80 = 121 = 11^2. Aby znaleźć ten przykład, zakładamy, że kwadratami kolejnych liczb naturalnych są $a+b+c = (x+1)^2 = x^2+2x+1$, $a+b = x^2$ i $b+c = (x-1)^2 = x^2-2x+1$. Wobec tego $c = (a+b+c)-(a+b) = 2x+1$ i $a = (a+b+c)-(b+c) = 4x$. Stąd $a+c$ = 6x+1 i liczba ta ma być kwadratem, co zachodzi np. dla x=20. Wśród liczb mniejszych od 1000 analogicznie można znaleźć trójkę 57, 112 i 672 (57+112=169=13^2, 57+672=729=27^2, 112+672=784=28^2 i 57+112+672=836=29^2). Inne możliwe zestawy to (97, 192, 2112), (121, 240, 3360), (177, 352, 7392)...

10. Korzystając z algorytmu mnożenia pisemnego, mnożymy cyfrę jedności (=4) przez 4 i otrzymujemy 16, stąd wiemy, że cyfra dziesiątek szukanej liczby to 6. Z mnożenia 6 przez 4 otrzymujemy 24 i dodajemy jeden z przeniesienia, zatem cyfra setek szukanej liczby to 5. Analogicznie uzyskujemy jako kolejne cyfry od prawej 2, 0, 1. Kończymy w momencie uzyskania iloczynu równego 4. Zatem szukana liczba to 102564.