DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ I

1) Okręgi o promieniach 5 cm i 12 cm są styczne wewnętrznie. Prosta przechodząca przez punkt styczności wyznacza w każdym z okręgów cięciwę. Jedna z nich ma długość 8 cm. Jaką długość ma druga?

2) W ciągu ostatniego roku pensja prezesa firmy "Graty na raty" wzrosła o 400 zł, a jego sekretarki o 4%. Skutkiem tego ich średnia pensja wzrosła o 300 zł, czyli o 2%. Ile obecnie zarabia sekretarka, a ile prezes?

3) W filmie *science-fiction* człowieka o wzroście 180 cm i wadze 80 kg zmniejszono przez jednokładność do rozmiarów krasnoludka o wzroście 18 cm. Ile wtedy ważył?

4) Uczeń rozwiązał następujące zadanie: Przez $p_1, \ldots, p_n$ oznaczamy wszystkie liczby pierwsze nie większe od p_n. Czy liczba $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ jest pierwsza? Oto jego rozumowanie:
Liczba $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ daje resztę 1 z dzielenia przez wszystkie liczby pierwsze nie przekraczające p_n. Skoro nie ma żadnego dzielnika pierwszego mniejszego od niej, to sama jest pierwsza, co kończy dowód. Czy to rozumowanie jest poprawne? Uzupełnij ewentualne luki.

5) Sklejono ścianami trójkątnymi czworościan foremny o krawędzi a i ostrosłup czworokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość a. Ile ścian, wierzchołków i krawędzi ma otrzymany wielościan?

6) Liczbę x można zapisać ósemkowo jako ułamek z pięcioma miejscami po przecinku. Jak wygląda zapis x w systemie dziesiętnym?

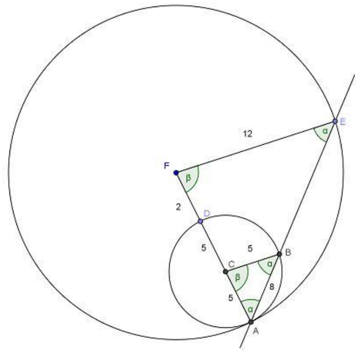
7) Podaj przykład równania z niewiadomą x, którego dziedzina jest zbiorem pustym.

8) Podaj przykład liczby niewymiernej należącej do przedziału $\left(^1/_{2018}, ^1/_{2017}\right)$.

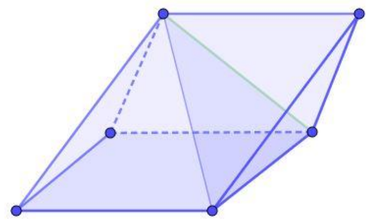
9) Nauczycielka napisała na tablicy pewną liczbę naturalną. Troje uczniów spostrzegło i wypowiedziało pewne własności napisanej liczby, ale tylko dwoje uczniów podało własności poprawne. Który uczeń popełnił błąd?
Artur: Napisana liczba jest kwadratem liczby całkowitej.
Bolesław: Suma cyfr napisanej liczby jest równa 38.
Celestyna: Napisana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 2.

10) Wybieramy jedną przekątną dziewięciokąta. W ilu co najwyżej punktach mogą ją przeciąć inne przekątne tego wielokąta?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/2018
GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ I
SZKICE ROZWIĄZAŃ



1. Promień dużego okręgu poprowadzony do punktu styczności przechodzi przez środek małego okręgu (symetria figury). Trójkąty ABC i AEF są równoramienne i podobne z cechy kkk (za brak uzasadnienia podobieństwa odejmujemy 4 pkt). Stąd otrzymujemy proporcję. Gdy $|AB|=8$ i $|AE|=x$, mamy 5:8 = 12:x i stąd x=19,2. Natomiast gdy $|AB|=x$ i $|AE|=8$, mamy 5:x= 12:8 i stąd $x = 3^1/_3$. Za rozważenie tylko jednego przypadku przyznajemy 3 pkt.
2. Niech x oznacza wysokość pensji sekretarki, a y – prezesa na początku roku. Średnia pensja wzrosła o 300 zł, zatem łącznie pensje wzrosły o 600 zł, więc sekretarki o 200 (bo prezesa o 400). Mamy 0,04x = 200, czyli x=5000, oraz 0,02(5000+y)/2=300, czyli y=25000. Sekretarka zarabia 5200 zł, a prezes 25400 zł. Za bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt. Za błąd rachunkowy -3 pkt.
3. Mamy do czynienia z figurami podobnymi w skali 1:10. Objętość figur podobnych zmienia się jak sześcian skali podobieństwa. Masa jest proporcjonalna do objętości (współczynnikiem proporcjonalności jest średnia gęstość ciała człowieka, Obj = $m\cdot d$). Zatem po zmniejszeniu człowiek będzie ważył 1000 razy mniej, czyli 80 g = 0,08 kg. Za proporcjonalne do wysokości zmniejszenie masy 0 pkt.
4. Rozumowanie jest niepoprawne. Badana liczba nie ma dzielników pierwszych mniejszych od p_n (a nie od niej samej!), ale może mieć dzielnik większy od p_n. Np. liczba 2·3·5·7·11·13 + 1 jest złożona i wynosi 30031 = 59·509.
5. Pionowa płaszczyzna symetrii ostrosłupa kwadratowego przechodząca przez środki krawędzi podstawy jest jednocześnie płaszczyzną symetrii doklejonego doń czworościanu foremnego. Stąd wierzchołek czworościanu leży na prostej będącej częścią wspólną płaszczyzn zawierających przeciwległe ściany boczne ostrosłupa, a więc leży w płaszczyźnie każdej z tych ścian, tworząc romb wraz z trzema wierzchołkami ściany trójkątnej ostrosłupa. Otrzymany wielościan ma więc 5 ścian (dwie w kształcie rombu, jedną kwadratową i dwie trójkątne), 6 wierzchołków i 9 krawędzi. Za odpowiedź 7, 6, 11 przyznajemy 0 pkt. Za poprawną odpowiedź, ale bez należytego uzasadnienia współpłaszczyznowości wierzchołka czworościanu ze ścianami ostrosłupa przyznajemy 5 pkt.



6. W systemie ósemkowym kolejne miejsca po przecinku oznaczają odwrotności kolejnych potęg ósemki, czyli części $^1/_8$, $^1/_{64}$, $1/8^3$ itd. Ułamek o zapisie ósemkowym 0,$\underline{abcde}$ można zapisać jako $\underline{abcde}/8^5$, czyli $\underline{abcde}/2^{15}$. Rozszerzając ten ułamek przez 5^{15}, dostajemy w liczniku $\underline{abcde}\cdot 5^{15}$, a w mianowniku 10^{15}, co oznacza, że zapis dziesiętny tego ułamka zajmuje 15 miejsc po przecinku. Za taką odpowiedź odejmujemy 4 pkt. Licznik może się bowiem skrócić z mianownikiem, w efekcie czego w mianowniku może wystąpić niższa potęga dziesiątki i zapis dziesiętny będzie krótszy. Zatem zapis ten ma **co najwyżej** 15 cyfr po przecinku.
7. Takie równanie może mieć pod pierwiastkiem wyrażenie ujemne dla każdego x, np. $\sqrt{-(x^2+1)}=3$, albo w mianowniku wyrażenie równe zero dla każdego x, np. $1/(x-x)=7$, albo rozłączne dziedziny lewej i prawej strony, np. $\sqrt{1/x}=\sqrt{-1/x}$. Za podanie samego wyrażenia algebraicznego (bez znaku równości między wyrażeniami) odejmujemy 2 pkt, bo to nie jest równanie. Za podanie równania sprzecznego (czyli z pustym rozwiązaniem, a nie z pustą dziedziną) przyznajemy 0 pkt.
8. Mamy $^1/_{2018} \approx 4{,}9554$ i $^1/_{2017} \approx 4{,}9578$, zatem dobrą liczbą jest np. 4,95550100100010000… Liczba mieści się we właściwym przedziale i ma rozwinięcie nieskończone nieokresowe. Za taką odpowiedź odejmujemy 3 pkt. Brak okresu należy bowiem wykazać (może mieć miliony cyfr, nie widać tego gołym okiem!). Załóżmy, że istnieje okres. Wtedy jest n-cyfrowy. Wskazujemy miejsce rozwinięcia, w którym kolejne n cyfr to zera i mamy sprzeczność z istnieniem niezerowego okresu. Inny sposób: $^1/_{2018} + (^1/_{2017} - {}^1/_{2018})/\pi$. Liczba ta wpada w przedział (do początku przedziału dodajemy ok. 1/3 jego długości). Trzeba jeszcze uzasadnić, że iloczyn/suma niezerowej liczby wymiernej i liczby niewymiernej są niewymierne – dowód nie wprost. Uczeń powinien to wykazać na prośbę jury, a jeśli nie potrafi, odejmujemy 3 pkt).
9. Pomylił się Artur. Jego zdanie przeczy zdaniom B i C. Kwadrat liczby nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 9. Każda liczba naturalna jest postaci $(9k+r)^2 = 81k^2+18k+r^2$, więc reszta musi być kwadratem, zatem jedną z liczb: 0, 1, 4, 9≡0, 16≡7, 25≡7, 36≡0, 49≡4, 64≡8.
10. Przekątna może odciąć 1 2 lub 3 wierzchołki 9-kąta po jednej swojej stronie i zostawia wtedy po drugiej stronie odpowiednio 6, 5 lub 4 wierzchołki. Tylko przekątne łączące wierzchołki leżące po różnych stronach wyróżnionej przekątnej przecinają ją. W pierwszym przypadku takich przekątnych jest 6, w drugim 2·5, a w trzecim 3·4, czyli najwięcej. Ew. można doliczyć końce. Oczekujemy jeszcze stwierdzenia, że każde takie przecięcie może wystąpić w innym punkcie wyjściowej przekątnej (co zachodzi, jeśli wielokąt nie ma żadnych osi symetrii). Jeśli nie padnie, odejmujemy 2 pkt.

DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/18
GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA
MECZ II

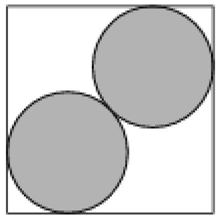
1. Pewna tajemnicza dodatnia wielkość najpierw stukrotnie zmalała o 10%, a następnie dwustukrotnie wzrosła o 11%, by na koniec znowu sto razy zmaleć o 10%. Czy to możliwe, żeby na końcu była mniejsza niż na początku?

2. Dany jest czworokąt wypukły *ABCD*, w którym kąt *ADC* ma miarę 150°, a kąt *DAB* – 40°. Okrąg o środku *D* przechodzący przez punkt *A* przechodzi także przez punkty *B* i *C*. Jaką miarę ma kąt *BCD*?

3. Każdą z liczb naturalnych od 1 do 1000 mnożymy przez każdą z liczb naturalnych od 1 do 1000. Ile wynosi suma wszystkich otrzymanych w ten sposób iloczynów?

4. W zbiorze liczb całkowitych określamy dwa działania (jedno- i dwuargumentowe): $\langle x \rangle = x^3$, $x||y = x^y$. Którą potęgą dwójki jest $\langle\langle 2\rangle || \langle 2\rangle\rangle$?

5. Wśród trójkątów, których długości boków wyrażają się w centymetrach liczbami całkowitymi, których jest więcej: tych o obwodzie 15 cm czy tych o obwodzie 16cm?



6. Dwa jednakowe cylindryczne słoiki umieszczono ciasno wewnątrz sześciennej skrzynki jak na rysunku (widok z góry). Średnica słoika wynosi 1 dm. Jaka jest pojemność skrzynki?

7. Dwa jednakowe czworokąty wypukłe rozcięto wzdłuż przekątnej: pierwszy z nich wzdłuż jednej, a drugi – wzdłuż drugiej. Czy z otrzymanych części zawsze można złożyć równoległobok?

8. Na meczu matematycznym zawodnik rozwiązał następujące zadanie: Przez $p_1, \dots, p_n$ oznaczamy wszystkie liczby pierwsze nie większe od p_n. Czy liczba $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ jest pierwsza? Oto jego rozumowanie: Liczba $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ daje resztę 1 z dzielenia przez wszystkie liczby pierwsze nie przekraczające p_n. Skoro nie ma żadnego dzielnika pierwszego, to sama jest pierwsza, co kończy dowód. Oceń to rozwiązanie w skali 0-10 i skomentuj.

9. Liczbę *x* można zapisać w systemie ósemkowym jako ułamek z pięcioma miejscami po przecinku. Co można powiedzieć o zapisie dziesiętnym liczby *x*?

10. W trapezie suma kątów przy dłuższej podstawie jest kątem prostym. Oblicz długość odcinka łączącego środki podstaw, wiedząc, że wartość bezwzględna różnicy ich długości wynosi 4.

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/18
GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ II
SZKICE ROZWIĄZAŃ

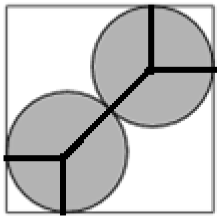
1. Niech początkowa wartość wynosi X. Po zmaleniu o 10% wynosi $0{,}9X$, a po 100 zmaleniach $0{,}9^{100}X$. Po wzroście o 11% wielkość wynosi $1{,}11\cdot 0{,}9^{100}X$. Na końcu wielkość wynosi $0{,}9^{100}\cdot 1{,}11^{200}\cdot 0{,}9^{100}X$, co z przemienności mnożenia daje $(0{,}9\cdot 1{,}11)^{200}X$. Liczba w nawiasie jest ułamkiem, więc pomnożona przez ułamek staje się jeszcze mniejsza. Ostateczny wynik jest ułamkiem wielkości X. Za wykonywanie jakichkolwiek obliczeń odejmujemy 2 pkt.

2. Niech x jest miarą kąta BCD. Ponieważ odcinki DA, DB i DC są promieniami okręgu, trójkąty ADB i BDC są równoramienne, a kąty przy ich podstawach – jednakowe. Suma kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$ wynosi $360 = 150+40+40+2x$. Stąd $x = 65°$.

3. Otrzymamy milion iloczynów, których suma wynosi 250 500 250 000. Suma liczb od 1 do 1000 wynosi $500\cdot 1001 = 500500$ (na prośbę jury uczeń powinien wskazać sposób obliczenia tej liczby, jeśli nie potrafi, odejmujemy 3 pkt). Podaną sumę iloczynów możemy zapisać w postaci $(1+2+3+\ldots+1000) + 2\cdot(1+\ldots+1000) + 3\cdot(1+\ldots+1000) + \ldots + 1000\cdot(1+\ldots+1000) = 500500^2 = 250\,500\,250\,000$. Za poprawne, ale bardziej skomplikowane rozwiązanie odejmujemy 2 pkt.

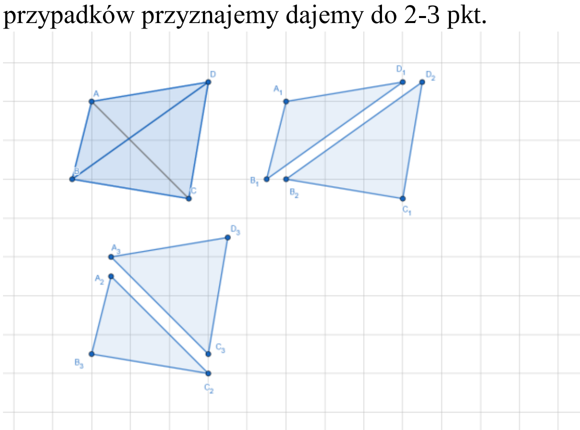
4. 2^{72}. Otrzymujemy kolejno: $\langle\langle 2\rangle || \langle 2\rangle\rangle = \langle 8||8\rangle = \langle 8^8\rangle = (8^8)^3 = 8^{24} = (2^3)^{24} = 2^{72}$.

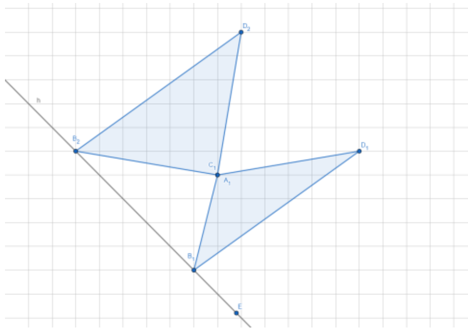
5. Więcej jest trójkątów o obwodzie 15 cm. Trzeba przedstawić liczby 15 i 16 w postaci sumy $a+b+c$, gdzie $a \le b \le c$. W obu przypadkach wystarczy rozważyć możliwe wartości a od 1 do 5. Dla obwodu 15 otrzymujemy 7 możliwych trójek (1, 7, 7), (2, 6, 7), (3, 5, 7), (3, 6, 6), (4, 4, 7), (4, 5, 6), (5, 5, 5), a dla obwodu 16 – tylko 5: (2, 7, 7), (3, 6, 7), (4, 5, 7), (4, 6, 6), (5, 5, 6).



6. Obliczamy długość krawędzi skrzynki. Po dorysowaniu promieni słoików widać, że w rogach powstały dwa kwadraty, a między nimi odcinek o długości 10 cm. Stąd przekątna podstawy d ma długość $2\cdot 5\sqrt{2}+10 = 10\sqrt{2}+10$ czyli $\sqrt{2}+1$ dm. Krawędź skrzynki a ma długość $d/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 + 1$ dm. Stąd objętość skrzynki wynosi $a^3 = 1i^3/4\ \sqrt{2} + 2{,}5$ litra. Aby obliczyć sześcian długości krawędzi uczniowie mogą mnożyć trzykrotnie jej długość.

7. Trójkąty powstałe z podziału czworokąta $ABCD$ przekątną BD przesuwamy równolegle, aby wierzchołki A i C pokryły się (nie wykonujemy żadnego obrotu). Przeciwległe boki są teraz równe (przekątna BD) i równoległe, a pozostałe 'dziury' można zapełnić trójkątami z drugiego podziału (w obu wypadkach zgadzają się boki i kąty między nimi, więc pasujący trójkąt jest jeden). Otrzymujemy czworokąt z dwiema parami równych boków (każda para równa innej przekątnej czworokąta). To musi być równoległobok. Za uzasadnienie tylko dla szczególnych przypadków przyznajemy dajemy do 2-3 pkt.



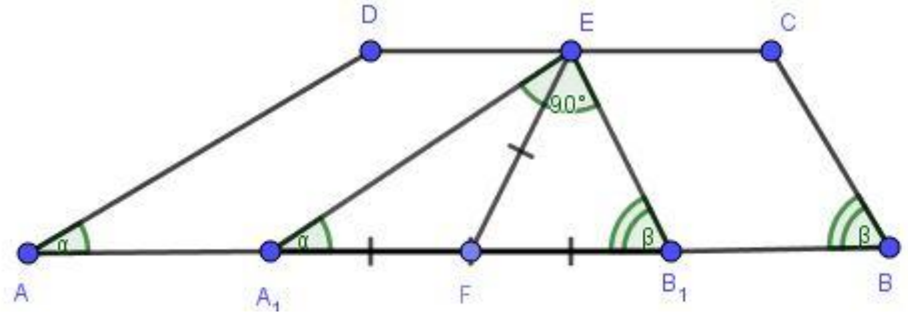


8. Rozwiązanie jest błędne (za 0 pkt). To prawda, że liczba $p_1\cdot\ldots\cdot p_n + 1$ nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą od p_1 do p_n (bo z każdego takiego dzielenia daje resztę 1), ale może dzielić się przez liczby większe od p_n, np. $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13 + 1 = 59\cdot 509$.

9. Liczba x jest ułamkiem, czyli ma 0 przed przecinkiem. W systemie ósemkowym kolejne miejsca po przecinku oznaczają części: 1/8, 1/64, $1/8^3$ itd. Skoro rozwinięcie ósemkowe x ma 5 cyfr, to liczba ta wynosi $L/8^5$, gdzie licznik L ma wartość naturalną. A to jest $L/2^{15}$, co po rozszerzeniu ułamka przez 5^{15} można zapisać jako $K/10^{15}$. To oznacza, że w systemie dziesiętnym x ma po przecinku nie więcej niż 15 cyfr. Za odpowiedź 15 odejmujemy 4 pkt (cyfr może być mniej, bo nie znamy wartości L i licznik może się z mianownikiem poskracać).

10. Niech E i F oznaczają środki podstaw trapezu $ABCD$ (odpowiednio DC i AB). Z punktu E prowadzimy proste równoległe do ramion. Przetną one podstawę AB odpowiednio w punktach A_1 i B_1. Z warunków zadania wynika, że

A_1EB_1 jest trójkątem prostokątnym. EF jako środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej A_1B_1 (jest długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie). Mamy więc $|A_1B_1| = |AB|-|AA_1|-|B_1B| = |AB|-|DE|-|EC| = |AB|-|DC| = 4$. Ostatecznie $|EF| = {}^1/_2 \cdot 4 = 2$.



DOLNOŚLĄSKIE MECZE MATEMATYCZNE
EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/18

GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA

MECZ III

1. Kiedy tramwaj ruszał z pętli, połowa pasażerów w drugim wagonie stała, a połowa siedziała. Na pierwszym przystanku liczba pasażerów tego wagonu wzrosła o 8%. Ile ludzi wsiadło do wagonu na pętli, jeśli mieści się w nim najwyżej 70 osób?

2. Udowodnij, że pole trójkąta, którego jeden wierzchołek połowi jedno ramię trapezu, a dwa pozostałe są końcami drugiego ramienia, jest połową pola tego trapezu.

3. Udowodnij, że każdy osiemnastokąt wypukły ma kąt o mierze nie mniejszej niż 160°.

4. Przez w oznaczmy liczbę wierzchołków graniastosłupa, przez k – liczbę jego krawędzi, a przez $ś$ - ścian. Jakie są możliwe wartości liczby $w+k+ś$?

5. Iloczyn 3 liczb pierwszych równa się potrojonej sumie tych liczb. Co to za liczby?

6. Na stole leży 2018 patyczków. Dwie osoby grają w *Patyczaka*: zabierają naprzemian ze stołu 1, 2, 3, ..., 9, 10 lub 11 patyczków. Wygrywa ten, kto weźmie ostatni patyczek. Czy któryś z graczy ma strategię wygrywającą?

7. Widzowie sztuki „Małpa w kąpieli" w Teatrze Śmiałym zajęli miejsca od 1 do 1001, a każdy z nich miał z szatni numerek też od 1 do 1001. Udowodnij, że jest na sali przynajmniej jeden widz, dla którego suma numeru miejsca, na którym siedzi, i numerka z szatni jest parzysta.

8. Przy sprzedaży tony gwoździ półcalowych uzyskuje się zysk wynoszący p% ceny zakupu, czyli q% ceny sprzedaży. Ile wynosi $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$?

9. Po torze wyścigowym w kształcie okręgu o promieniu 80 cm poruszają się dwie mrówki – – Andzia i Bob. Jeżeli kierunki ich ruchów są zgodne, to Andzia wyprzedza Boba co minutę. Jeśli są przeciwne, to mrówki mijają się co 24s. Z jaką prędkością porusza się Bob?

10. Na święta odwiedził was dawny znajomy rodziców, o którym nic nie pamiętacie. Oznajmił, że ma dwoje dzieci i że jedno z nich to córka Alicja. Jaka jest szansa na to, że ten znajomy ma dwie córki?

EDYCJA XVII – ROK SZKOLNY 2017/18
GIMNAZJA – RUNDA PÓŁFINAŁOWA – MECZ III
SZKICE ROZWIĄZAŃ

1. Oznaczmy tę liczbę przez p. Wiadomo, że p jest liczbą parzystą (połowa siedziała) oraz że 8%p jest liczbą całkowitą. 8%p = $2p/25$, więc p musi się dzielić przez 25. Parzystą liczbą naturalną podzielną przez 25 mniejszą od 70 jest tylko 50.

2. Oznaczmy wierzchołki trapezu A, B, C i D, tak żeby odcinek AB był podstawą trapezu. Środki odcinków AD i BC oznaczmy odpowiednio przez M i N. Jeśli przez h oznaczymy wysokość trapezu, to przyrównując pole trapezu $ABCD$ do sumy pól trapezów $ABNM$ i $CDMN$, otrzymamy: $\frac{AB+CD}{2}\cdot h = \frac{AB+MN}{2}\cdot\frac{h}{2}+\frac{CD+MN}{2}\cdot\frac{h}{2}$, skąd $MN=\frac{AB+CD}{2}$. W zadaniu chodzi o pole np. trójkąta BCM. Wynosi ono $2\cdot(\frac{1}{2}MN\cdot\frac{h}{2})=\frac{AB+CD}{2}\cdot\frac{h}{2}$, czyli połowę pola trapezu $ABCD$.

3. Suma kątów osiemnastokąta wypukłego wynosi $18\cdot180°-360°=2880°$ (co widać po podzieleniu go na trójkąty przez połączenie odcinkami dowolnego punktu z wnętrza ze wszystkimi wierzchołkami). Gdyby każdy kąt osiemnastokąta był mniejszy niż 160°, ich suma byłaby mniejsza od 2880°, więc jest to niemożliwe.

4. Jeśli przez p oznaczymy liczbę wierzchołków podstawy graniastosłupa (p jest dowolną liczbą naturalną ≥ 3), to $w=2p$, $k=3p$ i $ś=p+2$, zatem $w+k+ś=6p+2$ może być każdą liczbą tej postaci dla p naturalnych ≥ 3. Za brak uzasadnienia, że każda liczba tej postaci jest dobra, odejmujemy 3 punkty.

5. Oznaczmy te liczby przez a, b i c. Mamy: $abc = 3(a+b+c)$, czyli lewa strona dzieli się przez 3. Jest to możliwe (z pierwszości a, b i c), tylko jeśli jedna z tych liczb to 3. Pozostałe dwie liczby oznaczmy przez k i l. Ma zachodzić: $kl = k+l+3$, skąd $k = (l+3)/(l-1) = 1 + 4/(l-1)$. Analogicznie $l = 1 + 4/(k-1)$. Zatem liczby $k-1$ i $l-1$ są dzielnikami czwórki, czyli $k, l \in \{-3, -1, 0, 2, 3, 5\}$. $k, l \geq 2$ i są różne od 3 (w zadaniu mamy 3 liczby pierwsze), więc sprawdzamy k = 2 i 5, co daje odpowiednio l = 5 i 2. Szukane liczby to zatem 2, 3 i 5. Za samo podanie tych liczb i sprawdzenie, że spełniają warunki zadania przyznajemy 2 pkt.

6. Żeby mieć pewną wygraną, trzeba przed swoim ostatnim ruchem zastać na stole 1, 2, 3, ... lub 11 patyczków. Aby zmusić przeciwnika do wytworzenia takiej sytuacji, w przedostatnim swoim ruchu trzeba pozostawić na stole 12 patyczków. Analogicznie, żeby dało się to zrobić, musimy przed tym ruchem zastać na stole 13, 14, 15, ... lub 23 patyczki, co z kolei możemy sobie zapewnić przez pozostawienie w poprzednim ruchu na stole 24 patyczków. Powtarzając to rozumowanie (dodając 12), dojdziemy do wniosku, że aby zapewnić sobie wygraną, musimy w pewnym ruchu zostawić na stole 2016 patyczków. Jest to możliwe, jeśli zaczynamy grę. Strategię wygrywającą ma więc gracz rozpoczynający.

7. Mamy 1001 sum i dają one po zsumowaniu $2\cdot(1+2+...+1001)$, czyli liczbę parzystą. Gdyby wszystkie obliczone sumy były nieparzyste, $2\cdot(1+2+...+1001)$ byłoby sumą nieparzystej (1001) liczby liczb nieparzystych, więc nie byłoby parzyste, zatem przynajmniej jeden widz otrzymał parzystą sumę.

8. Oznaczmy przez z cenę zakupu, a przez s cenę sprzedaży. Zysk to $s-z$ i z warunków zadania jest on równy $p\%z = q\%s$. Mamy więc: $s-z = pz/100$ i $pz = qs$. Z drugiego równania $p=\frac{qs}{z}$, skąd po podstawieniu s wyznaczonego z pierwszego równania $p=\frac{q(\frac{pz}{100}+z)}{z}=q\cdot(\frac{p}{100}+1)$, skąd $\frac{1}{q}=\frac{1}{100}+\frac{1}{p}$, czyli szukana różnica wynosi 0,01.

9. Szukaną prędkość w cm/s oznaczmy przez v_B, a prędkość Andzi przez v_A. W ciągu minuty Bob pokonuje więc $60v_B$ centymetrów, a Andzia o 160π cm więcej. Stąd równanie: $60v_B + 160\pi = 60v_A$. Analogicznie przy ruchach w przeciwnych kierunkach $160\pi = 24(v_A+ v_B)$. Mamy więc układ $\begin{cases}3v_A-3v_B=4\pi\\3v_A+3v_B=10\pi\end{cases}$ $\begin{cases}3v_A-3v_B=8\pi\\3v_A+3v_B=20\pi\end{cases}$, skąd po odjęciu pierwszego równania stronami od drugiego i podzieleniu obu stron przez 6 otrzymujemy odpowiedź: 2π cm/s.

10. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że prawdopodobieństwo tego, że znajomy ma dwie córki wynosi $^1/_2$, ale przecież są cztery możliwości rozkładu płci dwójki dzieci: (C, C), (C, D), (D, C) i (D, D), gdzie zapis (A, B) oznacza rodzeństwo, w którym A to starsze dziecko a B – młodsze, C oznacza chłopaka, a D dziewczynkę. Wiemy, że znajomy ma córkę, czyli odrzucamy opcję (C, C). Zostaje wybór jednej z trzech możliwości (C, D), (D, C) i (D, D), a szansa na wybór (D, D) wynosi $^1/_3$.